ریاضیات مهندسی
ویژه دوره کارشناسی مهندسی مکانیک

مدرس: فرزام دادگر راد
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان

Part 1: Partial Differential Equations (PDEs)
Part 2: Complex Functions

Textbook for part 1:
Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers,
by Myint-U & Debnath, 4th edition, 2007

Textbook for part 2:
Complex Variables and Applications,
by Brown & Churchill, 7th edition, 2002

توجه: اسلایدهای مربوط به فصل های دوم تا پنجم در بهار ۱۳۸۸ تهیه شده و به زبان فارسی می باشند. اسلایدهای مربوط به فصل های اول، ششم، هفتم و هشتم در زمستان ۱۳۹۷ و بهار ۱۳۹۸ تهیه شده و به دلیل سهولت در تایپ، به زبان انگلیسی می باشند. تبدیل توضیحات از زبان انگلیسی به فارسی در اسلایدهای جدید در آینده صورت خواهد گرفت. همچنین اثبات برخی قضایا که در اسلایدها ارائه نشده، در کلاس درس صورت خواهد گرفت.

EVALUATION	
The First Mid-Term Exam	8 out of 20
The Second Mid-Term Exam	5 out of 20
Final Exam	5 out of 20
Homework	2 out of 20
Presence & Discussion	Up to +2

Part 1: Partial Differential Equations (PDEs)

Ordinary Differential Equations (ODEs) :

The unknown functions are expressed in terms of a single independent variable, e.g., t

Examples:

1) $F(t) = ma(t) = m\ddot{x}(t) \quad ===> \quad \ddot{x}(t) = \dfrac{F(t)}{m} = q(t)$

2) $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$

3) $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) + hx^3(t) = F(t)$

4) $\begin{cases} a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + c\dot{y}(t) + dx(t) + ey(t) = f(t) \\ g\ddot{y}(t) + h\dot{x}(t) + k\dot{y}(t) + mx(t) + ny(t) = q(t) \end{cases}$

Types of ODEs :

1) Initial Value Problems (IVPs)

2) Boundary Value Problems (BVPs)

3) Eigenvalue Problems (EVPs) [can be based on IVP or BVP]

Partial Differential Equations (PDEs):

The unknown functions are expressed in terms of two or more independent variables, e.g., x and t (or x,y,z,t in most physical problems)

Examples:

1) $$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = F(x,t)$$

2) $$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = F(x,t)$$

3) $$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2} = F(x,y,z,t)$$

4) $$\begin{cases} a\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} + c\dfrac{\partial w(x,t)}{\partial x} + d\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} + e\dfrac{\partial w(x,t)}{\partial t} = f(x,t) \\ g\dfrac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + h\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} + m\dfrac{\partial w(x,t)}{\partial x} + n\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} + p\dfrac{\partial w(x,t)}{\partial t} = q(x,t) \end{cases}$$

Types of PDEs :

1) Boundary Value Problems (BVPs)

2) Initial Boundary Value Problems (IBVPs)

3) Eigenvalue Problems (EVPs)

First - order linear ODE

$$a_1(t)\dot{x}(t)+a_2(t)x(t)=a_3(t) \Rightarrow \dot{x}(t)+\frac{a_2(t)}{a_1(t)}x(t)=\frac{a_3(t)}{a_1(t)} \Rightarrow \boxed{\dot{x}(t)+a(t)x(t)=f(t) \qquad (1)}$$

Factor of integral: $\boxed{\mu(t)=e^{\int a(t)dt}} \Rightarrow \ln\mu = \ln e^{\int a(t)dt} = \int a(t)dt$

$$\xrightarrow{diff\ \ t} \frac{d}{dt}\ln\mu = \frac{d}{dt}\int a(t)dt \Rightarrow \frac{\dot{\mu}}{\mu} = a(t) \Rightarrow \boxed{\dot{\mu}(t) = \mu(t)a(t) \qquad (2)}$$

multiply both sides of Eq (1) by $\mu(t)$ and then use Eq (2):

$$\mu\dot{x}+\mu a x=\mu f \Rightarrow \mu\dot{x}+\dot{\mu}x=\mu f \Rightarrow \frac{d}{dt}(\mu x) = \mu f$$

$$\Rightarrow \mu x=\int \mu f dt + C \Rightarrow \boxed{x(t)=\mu^{-1}\left(\int \mu f dt + C\right)}$$

The constant C is determined from the given Initial Condition of the problem.

EXAMPLE : solve $\dot{x}(t)+2x(t)=6$, IC: $x(0)=2$

SOLUTION: $a(t)=2 \Rightarrow$ Factor of integral: $\boxed{\mu(t)=e^{\int a(t)dt} = e^{2t}}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{2t}x) = 6e^{2t} \Rightarrow e^{2t}x(t)=\int 6e^{2t}dt + C = 3e^{2t} + C$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t)=3+Ce^{-2t}}, x(0) = 2 \Rightarrow 3+C = 2 \Rightarrow C = -1 \Rightarrow \boxed{x(t)=3-e^{-2t}}$$

چند مثال ساده جهت مرور معادلات دیفرانسیل معمولی

Second - order linear ODE with constant coefficients :

$$\xrightarrow[t\in[0,\infty)]{IVP}\begin{cases}\text{Homogeneous equation:} & k_1\ddot{x}(t)+k_2\dot{x}(t)+k_3x(t)=0, \quad x(0)=X,\ \dot{x}(0)=V\\ \text{Non-homogeneous equation:} & k_1\ddot{x}(t)+k_2\dot{x}(t)+k_3x(t)=f(t), \quad x(0)=X,\ \dot{x}(0)=V\end{cases}$$

$$\xrightarrow[x\in[0,L]]{BVP}\begin{cases}\text{Homogeneous equation:} & k_1u''(x)+k_2u'(x)+k_3u(x)=0, \quad u(0)=\alpha,\ u(L)=\beta\\ \text{Non-homogeneous equation:} & k_1u''(x)+k_2u'(x)+k_3u(x)=f(x), \quad u(0)=\alpha,\ u(L)=\beta\end{cases}$$

EXAMPLE (IVP)**:** $\ddot{x}(t)-7\dot{x}(t)+12x(t)=0$, ICs: $x(0)=1,\ \dot{x}(0)=5$

SOLUTION: let $x(t)=e^{st} \Rightarrow \dot{x}(t)=se^{st},\quad \ddot{x}(t)=s^2e^{st}$

$$\Rightarrow (s^2-7s+12)e^{st}=0 \xrightarrow{e^{st}\neq 0} \boxed{s^2-7s+12=0} \text{ Characteristic Equation}$$

$$\to (s-3)(s-4)=0 \to s_1=3,\ s_2=4 \to x_1(t)=e^{3t}, x_2(t)=e^{4t}$$

$$\xrightarrow[\text{principle}]{\text{Superposition}} \boxed{x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)=c_1e^{3t}+c_2e^{4t}} \to \dot{x}(t)=3c_1e^{3t}+4c_2e^{4t}$$

The constant and are obtained from Initial Conditions (ICs):

$$\left.\begin{array}{l} x(0)=1 \xrightarrow{t=0} c_1+c_2=1 \\ \dot{x}(0)=5 \xrightarrow{t=0} 3c_1+4c_2=5 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1=-1,\ c_2=2 \Rightarrow \boxed{x(t)=2e^{4t}-e^{3t}}$$

EXAMPLE (IVP)**:** $\ddot{x}(t)+2\dot{x}(t)-15x(t)=5t$, ICs: $x(0)=2$, $\dot{x}(0)=6$

SOLUTION: $x(t)=\underbrace{x^{H}(t)}_{\text{homogeneous solution}}+\underbrace{x^{P}(t)}_{\text{particular solution}}$

$$\ddot{x}^{H}(t)+2\dot{x}^{H}(t)-15x^{H}(t)=0 \rightarrow x^{H}(t)=e^{st} \Rightarrow \boxed{s^2+2s-15=0} \text{ Characteristic Equation}$$

$$\rightarrow (s-3)(s+5)=0 \rightarrow s_1=3,\ s_2=-5 \xrightarrow[\text{principle}]{\text{Superposition}} \boxed{x^{H}(t)=c_1e^{3t}+c_2e^{-5t}}$$

$$\ddot{x}^{P}(t)+2\dot{x}^{P}(t)-15x^{P}(t)=5t \rightarrow \text{let } x^{P}(t)=g_1t+g_2 \rightarrow \dot{x}^{P}(t)=g_1,\ \ddot{x}^{P}(t)=0$$

$$\rightarrow 0+2g_1-15(g_1t+g_2)=5t \rightarrow -15g_1t+(2g_1-15g_2)=5t$$

$$\rightarrow g_1=-\frac{5}{15}=-\frac{1}{3},\quad g_2=\frac{2}{15}g_1=-\frac{2}{45} \rightarrow \boxed{x^{P}(t)=-\frac{1}{3}t-\frac{2}{45}}$$

$$\rightarrow \boxed{x(t)=x^{H}(t)+x^{P}(t)=c_1e^{3t}+c_2e^{-5t}-\frac{1}{3}t-\frac{2}{45}},\quad \dot{x}(t)=3c_1e^{3t}-5c_2e^{-5t}-\frac{1}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} x(0)=2 &\rightarrow c_1+c_2-\frac{2}{45}=2 \\ \dot{x}(0)=6 &\rightarrow 3c_1-5c_2-\frac{1}{3}=6 \end{aligned}\right\} \rightarrow c_1=\frac{149}{72},\quad c_2=-\frac{1}{40}$$

EXAMPLE (BVP)**:** $u''(x)+4u(x)=0, \quad u(0)=0, \; u(1)=3, \quad x \in [0,1]$

SOLUTION: $u(x)=e^{sx} \Rightarrow \boxed{s^2+4=0}$ Characteristic Equation

$$\rightarrow s_1=+2i\,, \; s_2=-2i \xrightarrow[\textit{principle}]{\textit{Superposition}} \boxed{u(x)=g_1e^{2ix}+g_2e^{-2ix}}$$

$$\boxed{\textit{Euler formula}:\; e^{\pm i\theta}=\cos\theta \pm i\,\sin\theta}$$

$$\rightarrow u(x)=g_1(\cos 2x+i\sin 2x)+g_1(\cos 2x-i\,\sin 2x)$$

$$=\underbrace{(g_1+g_2)}_{c_1}\cos 2x+\underbrace{(ig_1-ig_2)}_{c_2}\sin 2x$$

$$\rightarrow \boxed{u(x)=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x}$$

$$u(0)=0 \rightarrow c_1=0$$

$$u(1)=3 \rightarrow c_2\sin 2=3 \rightarrow c_2=\frac{3}{\sin 2}$$

$$\rightarrow \boxed{u(x)=\frac{3\sin 2x}{\sin 2}}$$

NOTE: If the charesteric equation has a repeated root "s_j" of **multiplicity** "m",

then the linear combination of $e^{s_j x}, x e^{s_j x}, x^2 e^{s_j x}, \ldots, x^{m-1} e^{s_j x}$ is part of the solution.

EXAMPLE : Find the general solution of the following ODE:

$$u^{(6)}(x)-10u^{(5)}(x)+40u^{(4)}(x)-82u'''(x)+91u''(x)-52u'(x)+12u(x)=0$$

SOLUTION: Let $u(x)=e^{sx}$

$\rightarrow$ Charecteristic equation: $s^6-10s^5+40s^4-82s^3+91s^2-52s+12=0$

$$\rightarrow (s-1)^3(s-2)^2(s-3)=0 \rightarrow \begin{cases} s_1=1, & m=3 \\ s_2=2, & m=2 \\ s_3=3, & m=1 \end{cases}$$

$$\rightarrow u(x)=\underbrace{c_1 e^{x}+c_2 x e^{x}+c_3 x^2 e^{x}}_{from\ s_1=1}+\underbrace{c_4 e^{2x}+c_5 x e^{2x}}_{from\ s_2=2}+\underbrace{c_6 e^{3x}}_{from\ s_3=3}$$

EXAMPLE : A **Boundary - Eigenvalue** problem

[**buckling of a simply - supported beam**]

Find the eigenvalue P and the eigenfunction u(x) in

$$\mathbf{EI\, u''(x) + Pu(x) = 0},\ \ P>0,\ \ EI>0,\ \ x \in [0, L],\ \ u(0)=0,\ \ u(L)=0$$

SOLUTION: Let $\beta = \sqrt{\dfrac{P}{EI}} > 0,\ \ \beta^2 = \dfrac{P}{EI} > 0 \rightarrow \quad u''(x)+\beta^2 u(x)=0$

$$\rightarrow let\ u(x) = e^{sx} \rightarrow s^2 + \beta^2 = 0 \rightarrow \boxed{s = \pm i\beta} \rightarrow u(x) = \alpha \sin(\beta x) + \theta \cos(\beta x)$$

$$\rightarrow from\ u(0) = 0 \rightarrow \theta = 0, \quad from\ u(L) = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 & (gives\ u(x) = 0) \\ \beta = 0 & (contradicts\ \ \beta > 0) \\ \boxed{\sin(\beta L) = 0 \rightarrow \beta L = n\pi} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\beta \rightarrow \beta_n} \boxed{\beta_n = \frac{n\pi}{L}} \xrightarrow{P \rightarrow P_n} \boxed{P_n = EI\,\beta_n^2 = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}}\ Eigenvalue$$

$$\rightarrow \beta_n x =$$

$$\xrightarrow[\alpha \rightarrow \alpha_n]{u \rightarrow u_n} \boxed{u_n(x) = \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}\ \ or\ \ \boxed{u_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}\ Eigenfunction$$

Cauchy - Euler ODEs are of the following form:

$$x^n u^{(n)}(x)+c_1 x^{n-1} u^{(n-1)}(x)+c_2 x^{n-2} u^{(n-2)}(x)+\ldots+c_{n-1} x u'(x)+c_n u(x)=0$$

The starting solution is given by $\boxed{u(x)=x^{\beta}}$. The value of is obtained from the charecteristic equation [see the examples].

NOTES :

1) If the charesteric equation has a repeated root "β_j" of **multiplicity** "m",

then the linear combination of $x^{\beta_j}, x^{\beta_j}\ln(x), x^{\beta_j}(\ln(x))^2 \ldots, x^{\beta_j}(\ln(x))^{m-1}$

is part of the solution.

2) If two roots are complex conjugate of each other, e.g., $\beta_1=\alpha+i\theta$

and $\beta_2=\alpha-i\theta$, then the linear combination of $x^{\alpha}\cos(\theta\ln(x))$

and $x^{\alpha}\sin(\theta\ln(x))$ is part of the solution.

A simple proof for complex conjugate roots :

$$\beta_1 = \alpha + i\,\theta, \quad \beta_2 = \alpha - i\,\theta$$

$$\text{If } \beta_1 = \alpha + i\,\theta \rightarrow u_1 = x^{\alpha + i\,\theta} \rightarrow \ln u_1 = (\alpha + i\,\theta)\ln x$$

$$\rightarrow u_1 = e^{(\alpha + i\,\theta)\ln x} = e^{\alpha \ln x} \times e^{i\,\theta \ln x} = x^{\alpha}(\cos\theta \ln x + i\,\sin\theta \ln x)$$

$$\text{If } \beta_2 = \alpha - i\,\theta \rightarrow u_2 = x^{\alpha - i\,\theta} \rightarrow \ln u_2 = (\alpha - i\,\theta)\ln x$$

$$\rightarrow u_2 = e^{(\alpha - i\,\theta)\ln x} = e^{\alpha \ln x} \times e^{-i\,\theta \ln x} = x^{\alpha}(\cos\theta \ln x - i\,\sin\theta \ln x)$$

$$\rightarrow \textit{linear combination}$$

$$\tilde{c}_1 u_1 + \tilde{c}_2 u_2 = x^{\alpha}[(\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2)\cos\theta \ln x + (i\tilde{c}_1 - i\tilde{c}_2)\sin\theta \ln x]$$

$$= x^{\alpha}[c_1 \cos\theta \ln x + c_2 \sin\theta \ln x]$$

EXAMPLE : Find the general solution of the following ODE:

$x^2 u''(x)+4u'(x)+u(x)=0$

SOLUTION: Let $u(x)=x^{\beta} \rightarrow u' = \beta x^{\beta-1}, \quad u'' = \beta(\beta-1)x^{\beta-2}$

$\rightarrow x^2[\beta(\beta-1)x^{\beta-2}]+4[\beta x^{\beta-1}]+[x^{\beta}]=0$

$\rightarrow$ *Charecteristic Equation* $\beta^2+3\beta+1=0$

$$\rightarrow \beta = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4(1)(1)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (two \quad real \;\; roots)$$

$$\rightarrow u(x) = c_1 x^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}} + c_2 x^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}}$$

EXAMPLE : Find the general solution of the following ODE:

$$x^2 u''(x)+3u'(x)+5u(x)=0$$

SOLUTION: Let $u(x)=x^{\beta} \rightarrow u' = \beta x^{\beta-1}, \quad u'' = \beta(\beta-1)x^{\beta-2}$

$$\rightarrow x^2[\beta(\beta-1)x^{\beta-2}]+3[\beta x^{\beta-1}]+5[x^{\beta}]=0$$

$$\rightarrow Charecteristic\ \ Equation \quad \beta^2+2\beta+5=0$$

$$\rightarrow \beta = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4(1)(5)}}{2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{16}}{2} = -1 \pm 2i \quad (two\ \ real\ \ roots)$$

$$\rightarrow u(x) = c_1 x^{-1}\cos(2\ln x) + c_2 x^{-1}\sin(2\ln x)$$

$$= \frac{c_1\cos(2\ln x) + c_2\sin(2\ln x)}{x}$$

Part 1: Partial Differential Equations (PDEs)

Chapter 1: Finite Fourier Series (ch. 6 of Myint-U)

Chapter 2: The Method of Separation of Variables (ch.7 of Myint-U)

Chapter 3: Extended Fourier Series (ch. 8 of Myint-U)

Chapter 4: Higher-Oder PDEs (chs. 9 & 10 of Myint-U)

Chapter 5: Fourier Integral & Inf Fourier Transformations (ch. 12 of Myint-U)

Chapter 6: First-Order PDEs (ch. 2 of Myint-U)

Chapter 7: Classification of Linear Second-Order PDEs (ch. 4 of Myint-U)

VECTOR SPACE :

Let X be a **set** and K be a **field** of scalars (either the set R of real numbers or the set C of complex numbers). Then X is called a vector space (or linear space) if it has an operation + called **addition**, an operation of **multiplication by scalars**, and satisfies the following axioms:

1. for all u, v in X, and scalars a, c, au + cv is also a member of X
2. u + v = v + u and u + (v + w) = (u + v) + w for all u, v, w in X
3. there is an element 0 of X called the zero element that has the property u + 0 = u for all u in X
4. for every u in X there is an element -u that satisfies u + (-u) = 0; then by the difference u - v we understand u + (-v)
5. (ac)u = a(cu) for all scalars a, c and for all u in X
6. (a+c)u = au+cu, and a(u+v) = au+av for all scalars a,c and for all u, v in X
7. $1 \cdot u = u$.

SOME TYPES OF VECTOR SPACES

(listen to oral explanations)

- Metric Space
- Normed Space
- Inner Product Space
- Banach Space (complete normed space)
- Hilbert Space (complete inner product space)

VECTOR SPACE

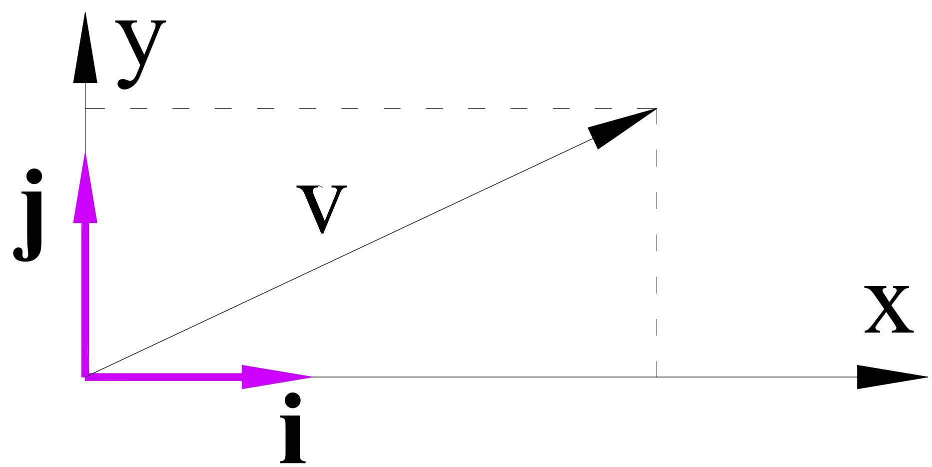
Example: $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$

$$\boxed{\text{Basis Vectors} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}, \quad \mathbf{i} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}}$$

Inner Product of Basis Vectors: $\mathbf{i}.\mathbf{i} = \mathbf{j}.\mathbf{j} = 1 \quad \mathbf{i}.\mathbf{j} = \mathbf{j}.\mathbf{i} = 0$

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = x \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + y \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

$x = \mathbf{V}.\mathbf{i} \qquad y = \mathbf{V}.\mathbf{j}$



VECTOR SPACE

Example: $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R} = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) \mid \ x_i \in \mathbf{R},\ i = 1, 2, \ldots, n\}$

$$\boxed{\text{Basis Vectors} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}}$$

Inner Product of Basis Vectors:

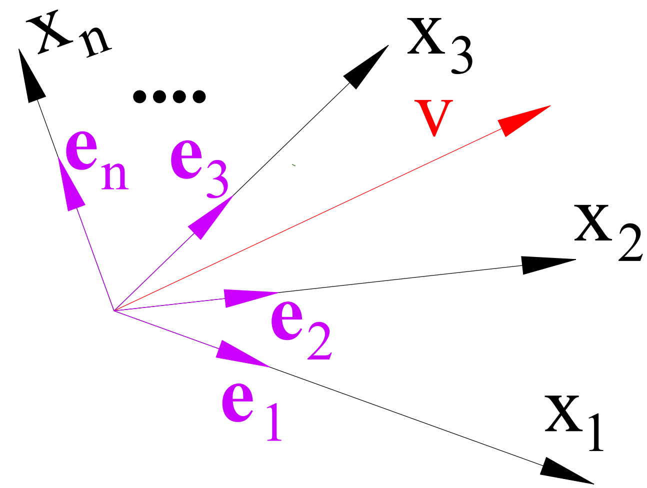
$$\mathbf{e}_1.\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2.\mathbf{e}_2 = \ldots = \mathbf{e}_n.\mathbf{e}_n = 1$$

$$\mathbf{e}_1.\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1.\mathbf{e}_3 = \ldots = \mathbf{e}_1.\mathbf{e}_n = 0, \ldots.$$

$$\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & if \quad i = j \\ 0 & if \quad i \neq j \end{cases}$$

$$\mathbf{V} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots. + x_n\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i$$

$$\mathrm{x}_1 = \mathbf{V}.\mathbf{e}_1 \qquad x_i = \mathbf{V}.\mathbf{e}_i$$

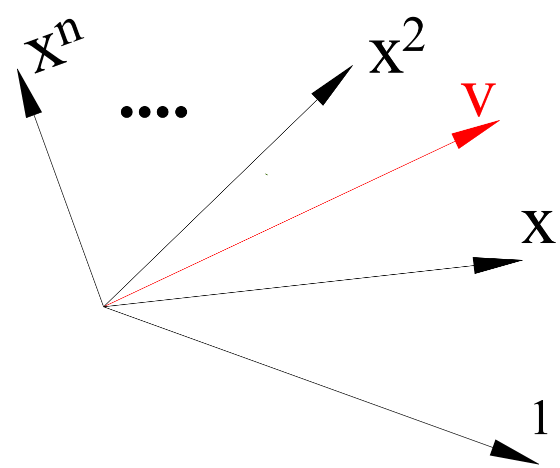


VECTOR SPACE

Example: Space of polynomial functions of the maximum degree n on the interval $I = [a,b]$ with $a,b \in \mathbf{R}$

$$\boxed{\text{Basis Vectors} = \{1 = x^0, x, x^2, \ldots, x^n\}}$$

$$\mathbf{V} = P_n(x) = c_0 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots . + c_n x^n$$



One may use the **Gram - Schmidt** algorithm to obtain orthogonal basis functions (beyond the scope of this course)

Definition of **Inner Product** in **Function Spaces** (weight function=s(x)):

$$\langle f(x), g(x) \rangle_s = \int_a^b f(x) g(x) s(x) dx$$

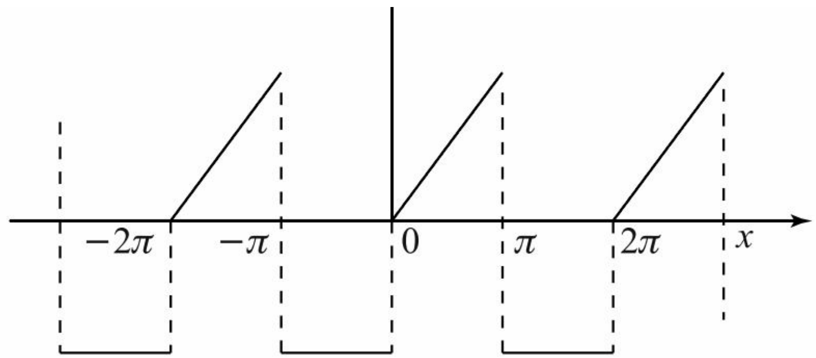
$$s(x) = 1 \Rightarrow \langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

Periodic function of the **finite** period T=2L

$f(x+T)=f(x+kT)=f(x), \quad k \in \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$

Example: A periodic function $f(x)$ with

$T = 2\pi$



Piecewise Continuous Function:

contains finite number of discontinuities

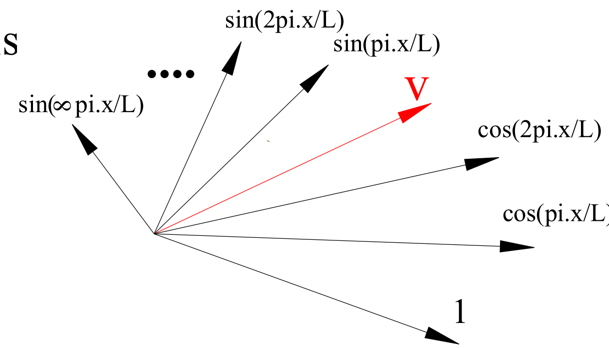
Example: A function $f(x)$ over $I = [0,1]$ which is NOT piecewise continuous

$$f(x) = \begin{cases} 1 & if \ x \in \mathbf{Q} \\ 0 & if \ x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

VECTOR SPACE

Example: Space of **piecewise continuous periodic** functions of the **finite** period T=2L made by the basis functions

$$\left\{1, \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\} \text{ with } n = 1, 2, \ldots, \infty$$



$$\boxed{\text{Basis Vectors} = \left\{1, \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\}, \quad n = 1, 2, \ldots, \infty}$$

$$\mathbf{V} = \tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} 1 + a_1 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \ldots + a_\infty \cos\left(\frac{\infty \pi x}{L}\right)$$
$$+ b_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \ldots + b_\infty \sin\left(\frac{\infty \pi x}{L}\right)$$

Fourier series of a **piecewise continuous periodic** function $f(x)$ with period $= T = 2L$

$$f(x) \approx \tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Orthogonality of basis vectors (basis functions) in Fourier Series

Inner Product of f(x) and g(x) with the weight function s(x)=1 over $I = [0,T]$

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \langle g(x), f(x)\rangle = \int_0^{T=2L} f(x)g(x)dx$$

$if \quad \langle f(x), g(x)\rangle = 0 \Rightarrow$ we say that f and g are **orthogonal**

$$\boxed{\text{Basis Vectors} = \{1, C_n, S_n\}, \quad C_n = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad S_n = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \ldots, \infty}$$

orthogonality of basis vectors m,n=1,2,3,...,∞

$$\begin{cases} \langle 1,1\rangle = 2L \\ \langle 1, C_n\rangle = 0 \\ \langle 1, S_n\rangle = 0 \\ \langle C_n, S_m\rangle = 0 \quad (\forall m, n \in \mathbf{N}) \\ \langle C_n, C_m\rangle = \delta_{mn}L = \begin{cases} L & if \quad m = n \\ 0 & if \quad m \neq n \end{cases} \\ \langle S_n, S_m\rangle = \delta_{mn}L = \begin{cases} L & if \quad m = n \\ 0 & if \quad m \neq n \end{cases} \end{cases}$$

Exersice : prove the above-mentioned orthogonality relations.

RECALL : **Fourier series** *of a* **piecewise continuous periodic** *function* $f(x)$

$period = T = 2L$

$$f(x) \approx \tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2}1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (*)$$

How to determine the coefficients $\{a_0, a_n, b_n\}$?

- To determine a_0, we calculate the inner product of both sides of (*) by the basis vector (or the basis function) "1"

$$\langle f,1\rangle = \frac{a_0}{2}\langle 1,1\rangle + a_1\langle C_1,1\rangle + \ldots + b_1\langle S_1,1\rangle + \ldots$$

$$\Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{1}{L}\langle f,1\rangle = \frac{1}{L}\int_{x=0}^{T=2L} f(x)dx}$$

- To determine a_m, we calculate the inner product of both sides of (*) by the basis vector "C_m"

$$\langle f,C_m\rangle = \frac{a_0}{2}\langle 1,C_m\rangle + a_1\langle C_1,C_m\rangle + \ldots + a_{m-1}\langle C_{m-1},C_m\rangle + a_m\langle C_m,C_m\rangle$$
$$+ a_{m+1}\langle C_{m+1},C_m\rangle + \ldots + b_1\langle S_1,C_m\rangle + \ldots$$

$$\Rightarrow a_m = \frac{1}{L}\langle f,C_m\rangle = \frac{1}{L}\int_{x=0}^{T=2L} f(x)C_m dx$$

$$or \quad \boxed{a_n = \frac{1}{L}\langle f,C_n\rangle = \frac{1}{L}\int_{x=0}^{T=2L} f(x)C_n dx = \frac{1}{L}\int_{x=0}^{T=2L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx}$$

SIMILARLY (calculate the inner product of both sides of (*) by "S_m"):

$$\boxed{b_n = \frac{1}{L}\langle f,S_n\rangle = \frac{1}{L}\int_{x=0}^{T=2L} f(x)S_n dx = \frac{1}{L}\int_{x=0}^{T=2L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx}$$

Fourier series of a **piecewise continuous periodic** function $f(x)$ with period $= T = 2L$

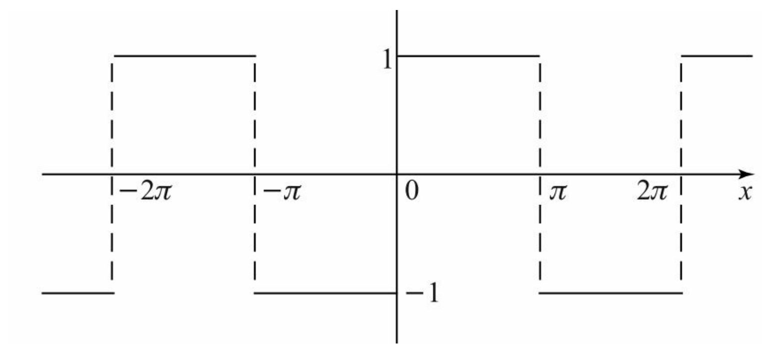
$$f(x) \approx \tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_n \\ b_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{L}\int_{x=0}^{T=2L} f(x) \begin{Bmatrix} 1 \\ C_n \\ S_n \end{Bmatrix} dx = \frac{1}{L}\int_{x=0}^{T=2L} f(x) \begin{Bmatrix} 1 \\ \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{Bmatrix} dx$$

$EXAMPLE\,1$: obtain the Fourier series of the following periodic function:

$for \quad I = [0, T = 2\pi]:$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & if \quad x \in (0, \pi] \\ -1 & if \quad x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$



$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{x=0}^{T=2L} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} 1dx - \int_{\pi}^{2\pi} 1dx\right] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{x=0}^{T=2L} f(x)C_n dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} \cos(n\mathrm{x})dx - \int_{\pi}^{2\pi} \cos(n\mathrm{x})dx\right] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{x=0}^{T=2L} f(x)S_n dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} \sin(n\mathrm{x})dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(n\mathrm{x})dx\right] = -\frac{1}{n\pi}\left[\cos(n\mathrm{x})\Big|_0^{\pi} - \cos(n\mathrm{x})\Big|_{\pi}^{2\pi}\right]$$

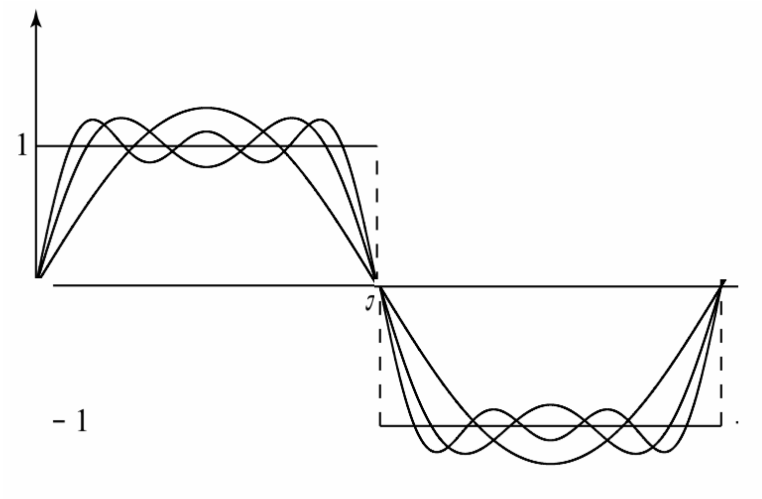
$$= \frac{2}{n\pi}[1-\cos(n\pi)] = \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n] = \begin{cases} 0 & if \quad n = 2k \quad (even) \\ \dfrac{4}{n\pi} & if \quad n = 2k-1 \quad (odd) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) \approx \tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi\mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right)$$

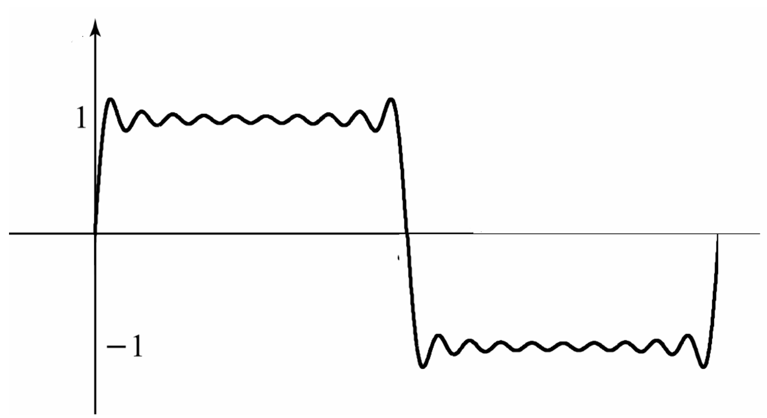
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]\sin(n\mathrm{x})$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi}\sin((2\mathrm{k}-1)\mathrm{x})$$

Graph of $\tilde{f}(x)$ for truncated series :



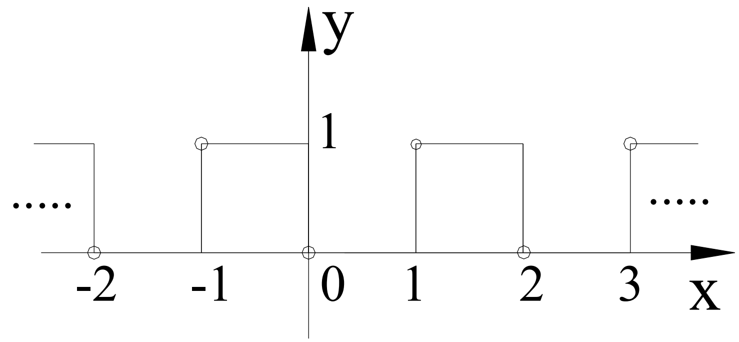
The GIBBS phenomenon



$EXAMPLE\ 2:$ obtain the Fourier series of the following periodic function:

$for\quad I=[0,T=2]:$

$$f(x)=\begin{cases}0 & if\quad x\in(0,1]\\ 1 & if\quad x\in(1,2]\end{cases}$$



$$a_0=\frac{1}{L}\int_{x=0}^{T=2L} f(x)dx=\frac{1}{1}\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{1}\left[\int_0^1 0dx+\int_1^2 1dx\right]=1$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{x=0}^{T=2L} f(x)C_n dx=\frac{1}{1}\left[\int_0^1 0\times\cos(n\pi x)dx+\int_1^2 1\times\cos(n\pi x)dx\right]$$

$$=\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\Big|_1^2=0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{x=0}^{T=2L} f(x) S_n dx = \frac{1}{1}\left[\int_0^1 0\times\sin(n\pi x)dx + \int_1^2 1\times\sin(n\pi x)dx\right] = -\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_1^2$$

$$= \frac{-1}{n\pi}[1-\cos(n\pi)] = \frac{-1}{n\pi}[1-(-1)^n] = \begin{cases} 0 & if \quad n = 2k \quad (even) \\ \dfrac{-2}{n\pi} & if \quad n = 2k-1 \quad (odd) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) \approx \tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n]\sin(n\pi x) = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi}\sin((2k-1)x)$$

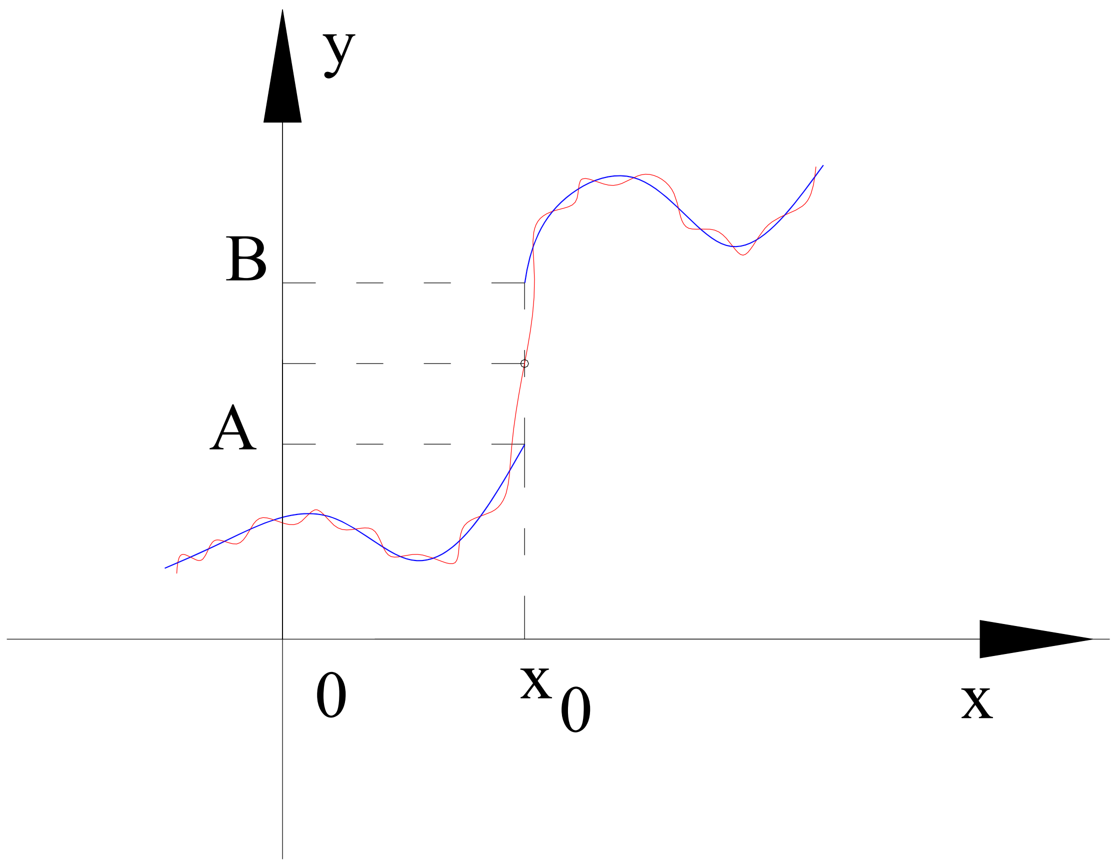
NOTE : The function f(x) is discontinuous at $x \in \mathbf{Z}$, but $\tilde{f}(x)$ is continuous everywhere!

At x=0 let $A = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1, \quad B = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0,$

$$\tilde{f}(0) = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi}\sin(0) = \frac{1}{2} = \frac{A+B}{2}$$

THEOREM : Let x_0 be a point of discontinuity. If

$$A = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad \text{and} \quad B = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad \text{then} \quad \tilde{f}(x_0) = \frac{A+B}{2}$$



Proof: consider $f(x) \approx \tilde{f}(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$

$=> at\ x = x_0^- = x_0 - \varepsilon :$

$$A = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi(x_0 - \varepsilon)}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi(x_0 - \varepsilon)}{L}\right) \right]$$

$=> at\ x = x_0^+ = x_0 + \varepsilon :$

$$B = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi(x_0 + \varepsilon)}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi(x_0 + \varepsilon)}{L}\right) \right]$$

expand the right-hand side of the above two relations and use

$\lim_{\varepsilon \to 0} \cos\left(\dfrac{n\pi\varepsilon}{L}\right) = 1$. Then add the resulting relations to get

$$A+B=2\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \right] = 2\tilde{f}(x_0)$$

$EXAMPLE\ 3$: obtain the Fourier series of the following periodic function:

$$for \quad I=[0,T=2]: \quad f(x)=x^2$$

L=T/2=1

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{x=0}^{T} f(x)dx=\frac{1}{1}\int_{0}^{2} x^2 dx=\frac{8}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{x=0}^{T} f(x)C_n dx=\frac{1}{1}\int_{0}^{2} x^2\cos(n\pi x)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{n\pi}\sin(n\pi x)+\frac{2x}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)-\frac{2}{n^3\pi^3}\sin(n\pi x)\right]_0^2=\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{x=0}^{T} f(x)S_n dx=\frac{1}{1}\int_{0}^{2} x^2\sin(n\pi x)dx$$

$$=\left[\frac{-x^2}{n\pi}\cos(n\pi x)+\frac{2x}{n^2\pi^2}\sin(n\pi x)+\frac{2}{n^3\pi^3}\cos(n\pi x)\right]_0^2=\frac{-4}{n\pi}$$

$$\Rightarrow f(x) \approx \tilde{f}(x) = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \cos(n\pi x) - \frac{4}{n\pi}\sin(n\pi x)\right]$$

$$A = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 4, \quad \text{and} \quad B = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{f}(0) = \frac{A+B}{2} = 2$$

Put x=0 in the Fourier series given above and note that $\tilde{f}(0) = 2$, then

$$\tilde{f}(0) = 2 = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \cos(0) - \frac{4}{n\pi}\sin(0)\right] \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

PARCEVAL Equality

Let f(x) and g(x) be two piecewise continuous functions of the same period T. Then the Fourier series of f and g is given by

$$f(x) \approx \tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (1)$$

$$g(x) \approx \tilde{g}(x) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b'_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (2)$$

Calculate the dot product of both sides of (1) by g(x)

$$\langle f, g \rangle = \frac{a_0}{2}\langle 1, g \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle C_n, g \rangle + b_n \langle S_n, g \rangle$$

But we know that $\langle 1, g \rangle = La'_0, \quad \langle C_n, g \rangle = La'_n, \quad \langle S_n, g \rangle = Lb'_n$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{L}\int_0^T f(x) g(x) dx = \frac{1}{2} a_0 a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n a'_n + b_n b'_n)}$$

Let $g = f \quad \Rightarrow$ **Parceval Equality** $\boxed{\frac{1}{L}\int_0^T f^2(x) dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)}$

$EXAMPLE\ 4:$ Apply the Parceval Equality on the function given in EXAMPLE3.

$$T=2,\ L=1,\quad f(x)=x^2\ for\ \ x\in[0,T]$$

$$a_0=\frac{8}{3},\quad a_n=\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2,\quad b_n=-\frac{4}{n\pi}$$

$$\int_0^T f^2(x)dx=\int_0^2 x^4 dx=\frac{1}{5}x^5\Big|_0^2=\frac{32}{5}$$

Parceval Equality : $$\frac{1}{L}\int_0^T f^2 dx=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{32}{5}=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{n\pi}\right)^4+\left(-\frac{4}{n\pi}\right)^2\right]$$

Recall $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}\Rightarrow\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}}$

NOTE : Using the trivial change of variable x=y or x=z:

$$\int_{x=a}^{b} f(x)dx = \int_{y=a}^{b} f(y)dy = \int_{z=a}^{b} f(z)dz$$

PROPOSITION : for *a periodic function* f(x) and the scalar α we have:

$$\boxed{\int_0^T f(x)dx = \int_\alpha^{T+\alpha} f(x)dx}$$

PROOF : *recall that*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^{T+\alpha} f(x)dx = \underbrace{\int_\alpha^0 f(x)dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^T f(x)dx}_{I_2} + \underbrace{\int_T^{T+\alpha} f(x)dx}_{I_3}$$

Consider the latest term :

$$I_3 = \int_{x=T}^{T+\alpha} f(x)dx \Rightarrow \text{apply change of variable } x = y + T \ or \ y = x - T$$

$$\Rightarrow I_3 = \int_{x=T}^{T+\alpha} f(x)dx = \int_{y=0}^{\alpha} f(T+y)dy = \int_{y=0}^{\alpha} f(y)dy = \int_{x=0}^{\alpha} f(x)dx = -I_1$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^{T+\alpha} f(x)dx = I_2 = \int_0^T f(x)dx$$

$APPLICATION\ IN\ \ FOURIER\ SERIES:$

$$Let\quad \alpha=-L \ \Rightarrow \int_0^T F(x)dx=\int_{-L}^{L} F(x)dx$$

Fourier series of a **piecewise continuous periodic** function $f(x)$ with period $=T=2L$

$$f(x)\approx\tilde{f}(x)=\frac{a_0}{2}1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi \mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi \mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right)$$

$$\begin{Bmatrix}a_0\\a_n\\b_n\end{Bmatrix}=\frac{1}{L}\int_{x=0}^{T=2L}f(x)\begin{Bmatrix}1\\C_n\\S_n\end{Bmatrix}dx=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\begin{Bmatrix}1\\C_n\\S_n\end{Bmatrix}dx$$

$If\ f(x)\ is\ \textbf{even}\ in[-L,L] \Rightarrow b_n = 0$

Fourier series of an even function in [-L,L]

$$f(x) \approx \tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2}1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_n \end{Bmatrix} = \frac{2}{L}\int_{x=0}^{L} f(x) \begin{Bmatrix} 1 \\ C_n \end{Bmatrix} dx$$

$If\ f(x)\ is\ \textbf{odd}\ in[-L,L] \Rightarrow a_0 = a_n = 0$

Fourier series of an odd function in [-L,L]

$$f(x) \approx \tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{x=0}^{L} f(x) S_n dx$$

EAMPLE: Recall EXAMPLE1.

Consider f(x) as an odd function in [-π,π].

Fourier series of the function f(x) defined on [0,L]

COSINE Fourier series of f(x) in [0,L]

based on the function F(x), which is **even** in [-L,L]

$$F(x) \approx \tilde{F}(x) = \left[\frac{a_0}{2}1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_{x \in \mathbf{R}}$$

$$f(x) \approx \tilde{f}(x) = \tilde{F}(x)\Big|_{x \in [0,L]} = \left[\frac{a_0}{2}1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_{x \in [0,L]}$$

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_n \end{Bmatrix} = \frac{2}{L}\int_{x=0}^{L} f(x) \begin{Bmatrix} 1 \\ C_n \end{Bmatrix} dx$$

SINE Fourier series of f(x) in [0,L]

based on the function F(x), which is **odd** in [-L,L]

$$F(x) \approx \tilde{F}(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_{x \in \mathbf{R}}$$

$$f(x) \approx \tilde{f}(x) = \tilde{F}(x)\Big|_{x \in [0,L]} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_{x \in [0,L]}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{x=0}^{L} f(x) S_n \, dx$$

NOTES :

1) It is possible to obtain the sine and cosine Fourier series for a function f(x) defined on [0,L].

2) The value of sine Fourier series of f(x) is always zero at x=0, while thevalue of f(0) may be nonzero. So, the sine Fourier series of f(x) generates incorrect value for $\tilde{f}(0)$.

3) The value of cosinee Fourier series of f(x) is equal to the value of f(0). So, the cosine Fourier series of f(x) generates correct value for $\tilde{f}(0)$.

EXAMPLE5 : Consider the function f(x)=1+x defined only on [0,1].

Obtain the sine and cosine Fourier series of f(x).

Solution:

1 – **COSINE Fourier series** of f(x) in [0,L] with L=1.

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_{x=0}^{L}(1+x)dx = 3$$

$$a_n = \frac{2}{1}\int_{x=0}^{L}(1+x)\cos(n\pi x)dx = \frac{-2(1-\cos(n\pi))}{(n\pi)^2} = \begin{cases} 0 & if \quad n = 2k \\ \dfrac{-4}{n^2\pi^2} & if \quad n = 2k-1 \end{cases}$$

$$f(x) \approx \tilde{f}(x)\Big|_{\text{cosine}} = \left[\frac{3}{2}1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_{x\in[0,L]}$$

2 – **Sine Fourier series** of f(x) in [0,L] with L=1.

$$b_n = \frac{2}{1}\int_{x=0}^{L}(1+x)\sin(n\pi x)dx = \frac{2(1-2\cos(n\pi))}{n\pi} = \begin{cases} \dfrac{-2}{n\pi} & if \quad n = 2k \\ \dfrac{6}{n\pi} & if \quad n = 2k-1 \end{cases}$$

$$f(x) \approx \tilde{f}(x)\Big|_{\text{sine}} = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-2(-1)^n)}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_{x\in[0,L]}$$

$NOTE:$ $If\ f(x)\ is\ a\ basis\ vector, its\ Fourier\ series\ is\ equal\ to\ itself.$ $EXAMPLE:$ $If\ L=\pi, then\ the\ Fourier\ series\ of\ f(x)=\sin(2x)\ is$ $\tilde{f}(x)=\sin(2x).$

COMPLEX FORM OF FOURIER SERIES

Recall the formula of Euler: $\begin{cases} e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \\ e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) \end{cases}$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \qquad \sin(\theta) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{-i}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

For the case of Fourier series, let $\theta = \frac{n\pi x}{L}$

$$f(x) \approx \tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2}1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\beta n x) + b_n \sin(\beta n x), \qquad \beta = \frac{\pi}{L}, \quad \theta = \frac{n\pi x}{L} = \beta n x$$

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_n \\ b_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{L}\int_{x=0}^{T=2L} f(x) \begin{Bmatrix} 1 \\ \cos(\beta n x) \\ \sin(\beta n x) \end{Bmatrix} dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \begin{Bmatrix} 1 \\ \cos(\beta n x) \\ \sin(\beta n x) \end{Bmatrix} dx$$

$$\Rightarrow f(x) \approx \tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2}1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2}(e^{i\beta nx} + e^{-i\beta nx}) + \frac{b_n}{2i}(e^{i\beta nx} - e^{-i\beta nx})$$

$$= \frac{a_0}{2}1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}(a_n - ib_n)}_{C_n} e^{i\beta nx}}_{S_1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}(a_n + ib_n)}_{K_n} e^{-i\beta nx}}_{S_2}$$

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2L}\int_0^T f(x)(\cos(\beta nx) - i\sin(\beta nx))dx = \frac{1}{2L}\int_0^T f(x)e^{-i\beta nx}dx$$

$$K_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2L}\int_0^T f(x)(\cos(\beta nx) + i\sin(\beta nx))dx = \frac{1}{2L}\int_0^T f(x)e^{i\beta nx}dx$$

$$=> K_{(-n)} = \frac{1}{2}(a_{(-n)} + ib_{(-n)}) = \frac{1}{2L}\int_0^T f(x)(\cos(-\beta nx) + i\sin(-\beta nx))dx$$

$$= \frac{1}{2L}\int_0^T f(x)\left[\cos(\beta nx) - i\sin(\beta nx)\right]dx = \frac{1}{2L}\int_0^T f(x)e^{-i\beta nx}dx = C_n$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} K_n e^{-i\beta nx} = \sum_{n=-\infty}^{-1} K_{(-n)} e^{i\beta nx} = \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n e^{i\beta nx}$$

$$\Rightarrow f(x) \approx \tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2}1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i\beta nx}}_{S_1} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n e^{i\beta nx}}_{S_2}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_0^T f(x)dx$$

$$C_0 = \frac{1}{2L}\int_0^T f(x)e^{-i\beta x\times 0}dx = \frac{a_0}{2}$$

$\Rightarrow$ all coefficients can be expressed as C_n $with\ n \in \mathbf{Z}$

<table>
<tr>
<td>

COMPLEX FOURIER SERIES

$$f(x) \approx \tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{+i\frac{n\pi x}{L}}$$

$\Rightarrow$ $$C_n = \frac{1}{2L}\int_0^T f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}dx$$

or

$$C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}dx$$

</td>
<td>or</td>
<td>

COMPLEX FOURIER SERIES

$$f(x) \approx \tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i\frac{n\pi x}{L}}$$

$$C_n = \frac{1}{2L}\int_0^T f(x)e^{+i\frac{n\pi x}{L}}dx$$

or

$$C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{+i\frac{n\pi x}{L}}dx$$

</td>
</tr>
</table>

$NOTE$: $\int_0^T F(x)dx = \int_{-L}^{L} F(x)dx$ for any periodic function $F(x)$ with T=2L

EXAMPLE : Obtain the complex Fourier series of a periodic function $f(x)$ with $T = 2$ and $f(x) = e^x$ in $[-1,1]$.

$$C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{L}} dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{x} e^{-in\pi x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{(1-in\pi)x} dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-in\pi}\left[e^{(1-in\pi)x}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-in\pi}\left[e^{1-in\pi} - e^{in\pi-1}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-in\pi}\left[e^{1}\times e^{-in\pi} - e^{in\pi}\times e^{-1}\right]$$

$$e^{\pm in\pi} = \cos(n\pi) \pm i\sin(n\pi) = (-1)^n$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{(-1)^n}{1-in\pi}\cdot\frac{e^{1}-e^{-1}}{2} = \frac{(-1)^n}{1-in\pi}.\sinh(1) = \frac{1+in\pi}{1+n^2\pi^2}.(-1)^n.\sinh(1)$$

$$\Rightarrow f(x) \approx \tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1+in\pi}{1+n^2\pi^2}.(-1)^n.\sinh(1) e^{+in\pi x}$$

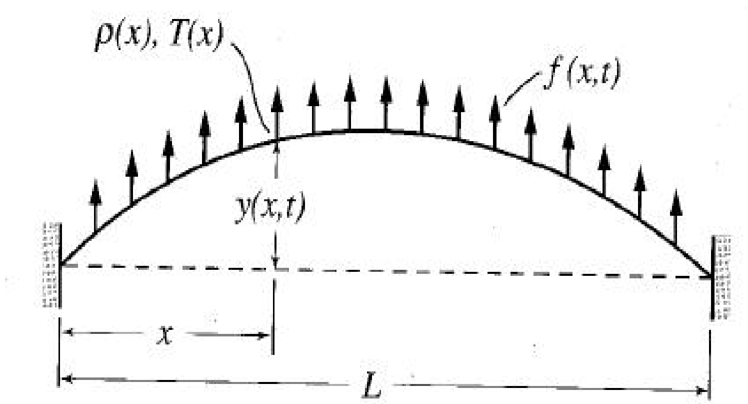
ریاضیات مهندسی
ویژه دوره کارشناسی مهندسی مکانیک

فصل دوم
روش جداسازی متغیرها

مدرس: فرزام دادگر راد
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان

ارتعاشات عرضی ریسمان

فرض کنید ریسمانی تحت نیروی گسترده برواحد طول *f(x,t)* قرار گرفته است. نیروی کشش در هر مقطع را با *T(x,t)* نشان می دهیم:

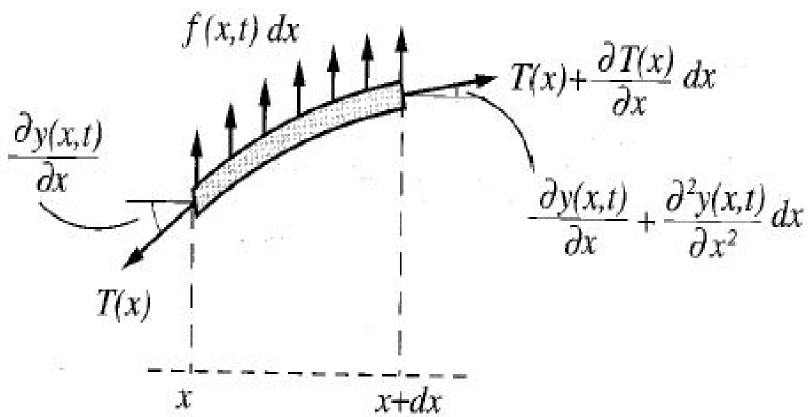


$$\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) \approx \alpha \approx \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x}dx = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx$$

$$\alpha + d\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx$$

اگر معادله حرکت را برای المان بنویسیم:



$$(T + dT)\sin(\alpha + d\alpha) - T\sin(\alpha)$$

$$+ f dx = \bar{\rho} dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x}dx$$

$$\sin(\alpha + d\alpha) \approx \alpha + d\alpha$$

ارتعاشات عرضی ریسمان

در نتیجه معادله دیفرانسیل حرکت بصورت زیر است:

$$dT d\alpha = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(dx)^2 \approx 0 \ \ (higher-order\ term)$$

$$General\ PDE: \ \boxed{\frac{\partial}{\partial x}[T(x,t)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}]+f = \bar{\rho}(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}}$$

$$if\ T = \text{constant} \Rightarrow \quad T\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}+f = \bar{\rho}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$if\ f(x,t)=0 \quad \Rightarrow \quad T\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \bar{\rho}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_{tt}-c^2 y_{xx}=0}\ wave\ equation$$

$$c=\sqrt{\frac{T}{\bar{\rho}}} : Transverse\ wave\ propagation\ velocity$$

خواهید دیدکه معادله دیفرانسیل حرکت ارتعاشات طولی یا پیچشی میله نیز به معادله موج منتهی می گردد.
فقط ثابت c در این معادلات با یکدیگر متفاوت است.

ارتعاشات عرضی ریسمان

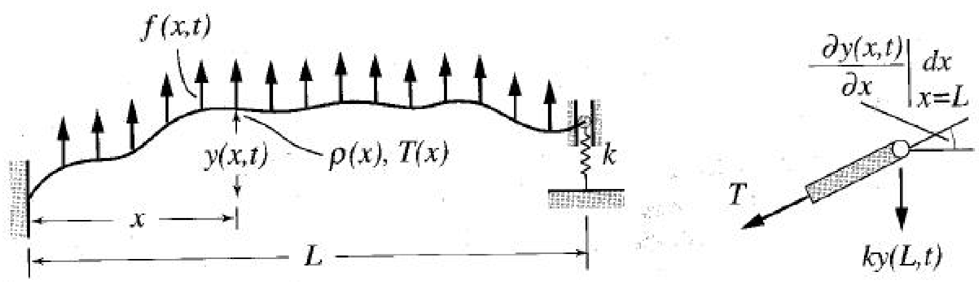
شرایط مرزی: شرط مرزی اصلی (EBC) بر روی y و شرط مرزی طبیعی (NBC) بر روی $T\,\partial y/\partial x$ است که معمولاً بصورت $\partial y/\partial x$ در معادلات ظاهر می گردد. اگر انتهای ریسمان آزاد باشد، بدیهی است که $T=0$ خواهد بود. نوعی از شرایط مرزی وجود دارند که در آنها ترکیبی از y و $\partial y/\partial x$ مشاهده می شود. این شرایط نیز در واقع از نوع طبیعی هستند.

مثال: شرایط مرزی ریسمانی که در $x=0$ و $x=l$ ثابت شده باشد:

$$@x=0 \quad \rightarrow \quad y(0,t)=0$$

$$@x=l \quad \rightarrow \quad y(l,t)=0$$

مثال: شرایط مرزی میله ای که در $x=0$ ثابت و در $x=l$ به یک فنر متصل شده باشد:



$$@x=0 \quad \rightarrow \quad y(0,t)=0$$

$$@x=l \quad \rightarrow \quad T\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x=l}+Ky\,\Big|_{x=l}=0 \;\rightarrow\; Ty_x(l,t)+Ky(l,t)=0$$

روش جداسازی متغیرها (Separation of Variables)

فرض کنید به عنوان مثال، تابع $u(x,t)$ مجهول معادله دیفرانسیل پاره ای باشد، در اینصورت مراحل روش جداسازی چنین است:

مرحله ۱) فرض می شود که بتوان u را بصورت حاصلضرب توابع $X(x)$ و $T(t)$ نوشت:

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

در گام های بعدی، باید توابع مجهول $X(x)$، $T(t)$ و ... را تعیین نماییم که منجر به تعیین u خواهد شد.

توجه: بطور مشابه، اگر $u(x,y)$ یا $u(x,y,z,t)$ مجهول معادله دیفرانسیل پاره ای باشند، فرض می شود که بتوان u را بصورت های زیر نوشت:

$$u(x,y)=X(x)Y(y)$$

$$u(x,y,z,t)=X(x)Y(y)Z(z)T(t)$$

روش جداسازی متغیرها (Separation of Variables)

مرحله ۲) اگر مجهول معادله $u(x,t)$ باشد، ابتدا تابع وابسته به مکان (یعنی $X(x)$) را با استفاده از شرایط مرزی تعیین می کنیم. در این مرحله، عملاً یک مساله مقدار ویژه–تابع ویژه (eigenvalue problem) یا اصطلاحاً مسأله Sturm-Liouville را حل می کنیم.

توجه: اگر هر دو تابع مجهول تابع مکان باشند (مانند $X(x)$ و $Y(y)$)، ابتدا یکی از آنها را که دارای شرایط مرزی همگن است بدست می آوریم. اگر هیچیک از شرایط مرزی همگن نباشند، باید از تکنیک های همگن سازی استفاده کرد که بعداً صحبت خواهد شد. در مورد توابع بیش از دو متغیر نیز خواهیم دید که ۲ یا چند تابع از حل مسائل مقدار ویژه بدست می آیند.

مرحله ۳) شکل کلی تابع بعدی (مانند $T(t)$) براساس مرحله ۲ قابل تعیین است و لذا شکل پاسخ u بدست می آید. اما در این مرحله، یک سری ضرایب مجهول در شکل کلی u بوجود می آیند.

مرحله ۴) ضرایب مجهول بوجود آمده در مرحله ۳، با استفاده از شرایط اولیه و یا شرایط مرزی که تاکنون استفاده نشده اند بدست می آیند.

روش جداسازی متغیرها (Separation of Variables)– مثال ارتعاشات ریسمان

مثال) فرض کنید دو انتهای ریسمانی بطول l کاملاً ثابت شده است. کشش ریسمان و چگالی طولی را در طول میله ثابت فرض نمایید. در زمان $t=0$، وسط ریسمان را به اندازه δ بالا برده و رها می کنیم. مطلوب است تعیین معادله ارتعاشات ریسمان.

حل: معادله دیفرانسیل پاره ای (PDE)، شرایط اولیه و شرایط مرزی مساله بصورت زیر می باشند:

$$y_{tt} - c^2 y_{xx} = 0 \;, \quad c = \sqrt{\frac{T}{\bar{\rho}}}$$

$$BCs \begin{cases} @x = 0: \; y(0,t) = 0 \\ @x = l: \; y(l,t) = 0 \end{cases}$$

$$ICs \begin{cases} @t = 0: \; y(x,0) = h(x) = \begin{cases} \delta \dfrac{x}{(l/2)} & for \quad 0 \le x \le \dfrac{l}{2} \\ \delta \dfrac{l-x}{(l/2)} & for \quad \dfrac{l}{2} \le x \le l \end{cases} \\ @t = 0: \; y_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

روش جداسازی متغیرها (Separation of Variables)– مثال ارتعاشات ریسمان

مرحله ۱) می نویسیم:

$$y(x,t)=X(x)T(t)$$

مرحله ۲) تعیین مساله مقدار ویژه و حل برای $X(x)$: با قراردادن $y=XT$ در معادله اصلی و تقسیم کردن طرفین بر XT خواهیم داشت:

$$T''X=c^2X''T \quad \Rightarrow \quad \frac{T''(t)}{T(t)}=c^2\frac{X''(x)}{X(x)}$$

نکته مهم: از آنجا که سمت راست فقط تابع x و سمت چپ فقط تابع t است، پس باید طرفین تساوی مقادیر ثابتی باشند:

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=c^2\frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda \Rightarrow \begin{cases} T''(t)-\lambda T(t)=0 \\ X''(x)-\dfrac{\lambda}{c^2}X(x)=0 \end{cases}$$

از روی شرایط مرزی مساله، شرایطی را برای $X(x)$ در مرزها بدست می آوریم:

$$y(0,t)=X(0)T(t)=0 \quad \rightarrow \quad X(0)=0$$
$$y(l,t)=X(l)T(t)=0 \quad \rightarrow \quad X(l)=0$$

در نهایت مساله مقدار ویژه (Sturm-Liouville) بصورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{X''(x)-\frac{\lambda}{c^2}X(x)=0 \;, \quad X(0)=0 \;, \quad X(l)=0}$$

در واقع λ مجهول اصلی است که باید تعیین شود و برای آن سه حالت بوجود می آید. باید مساله مقدار ویژه را برای هر سه حالت حل نمود.

$$\lambda>0 \;, \qquad \lambda=0 , \qquad \lambda<0$$

روش جداسازی متغیرها (Separation of Variables)– مثال ارتعاشات ریسمان

حالت اول: $\lambda=\alpha^2>0$ را درنظر بگیرید. در اینصورت برای $X(x)$ خواهیم داشت:

$$X''-\left(\frac{\alpha}{c}\right)^2X=0\rightarrow X(x)=Ae^{\frac{\alpha}{c}x}+Be^{-\frac{\alpha}{c}x}$$

با اعمال شرایط مرزی، به پاسخ صفر برای $\theta(x,t)$ می رسیم که قابل قبول نیست:

$$\begin{cases}X(0)=0\rightarrow A+B=0\\ X(l)=0\rightarrow Ae^{\frac{\alpha}{c}l}+Be^{-\frac{\alpha}{c}l}=0\end{cases}$$

$$\rightarrow A=B=0\ \rightarrow\ X(x)=0\ \rightarrow y(x,t)=XT=0$$

حالت دوم: $\lambda=0$ را درنظر بگیرید. در اینصورت حل $X(x)$ بصورت زیر خواهد شد که بازهم قابل قبول نیست:

$$X''(x)=0\quad\rightarrow\quad X(x)=Ax+B$$

$$\begin{cases}X(0)=0\rightarrow B=0\\ X(l)=0\rightarrow A=0\end{cases}\rightarrow X(x)=0\ \rightarrow y(x,t)=XT=0$$

روش جداسازی متغیرها (Separation of Variables)– مثال ارتعاشات ریسمان

حالت سوم: $\lambda=-\omega^2<0$ را درنظر بگیرید. در اینصورت برای $X(x)$ خواهیم داشت:

$$X''+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X=0\rightarrow X(x)=A\sin(\frac{\omega}{c}x)+B\cos(\frac{\omega}{c}x)$$

$$\begin{cases} X(0)=0\rightarrow B=0 \\ X(l)=0\rightarrow A\sin(\frac{\omega}{c}l)=0\rightarrow \begin{cases} if\ \ A=0\rightarrow X(x)=0\rightarrow y(x,t)=0 \\ if\ \ \sin(\frac{\omega}{c}l)=0\rightarrow \frac{\omega}{c}l=n\pi \end{cases} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\omega\equiv\omega_n}\boxed{\omega_n=\frac{n\pi c}{l}},\qquad n=1,2,\ldots\ (eigenvalues)$$

$$\xrightarrow[A\equiv A_n]{X\equiv X_n}\boxed{X_n(x)=A_n\sin(\frac{n\pi x}{l})}\qquad (eigenfunctions)$$

نکته ۱: در این مثال خاص که بیانگر ارتعاشات عرضی طناب است، ω_n ها فرکانس های طبیعی و X_n ها شکل مودهای ارتعاش هستند.

نکته ۲: به عبارت دیگر، در حل مساله مقدار ویژه، شکل مودها و فرکانس های طبیعی را بدست آورده ایم.

نکته ۳: از آنجا که طناب یک سیستم پیوسته (continuous) است، پس بینهایت فرکانس طبیعی و بینهایت شکل مود ارتعاشی دارد.

مرحله ۳) حال به تعیین $T(t)$ می پردازیم. از آنجا که بینهایت مقدار برای ω بدست آمده، پس بینهایت $T(t)$ نیز خواهیم داشت.

$$\overset{T\equiv T_n}{\Rightarrow} T_n''+\omega_n^2 T_n=0 \rightarrow T_n(t)=C_n\cos(\omega_n t)+D_n\sin(\omega_n t)$$

$$\Rightarrow\ y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\,T_n(t)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left\{C_n\cos(\omega_n t)+D_n\sin(\omega_n t)\right\}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$A_nC_n\equiv c_n\ ,\qquad A_nD_n\equiv d_n$$

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{c_n\cos(\omega_n t)+d_n\sin(\omega_n t)\right\}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$y_t(x,t)=\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n\left\{-c_n\sin(\omega_n t)+d_n\cos(\omega_n t)\right\}\sin\left[\frac{n\pi x}{l}\right]$$

مرحله ۴) حال باید ضرایب مجهول را از شرایط اولیه بدست آورد:

$$y(x,0)=h(x)\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{n\pi x}{l})=\begin{cases}\delta \dfrac{x}{(l/2)} & for \quad 0\le x\le \dfrac{l}{2}\\ \delta \dfrac{l-x}{(l/2)} & for \quad \dfrac{l}{2}\le x\le l\end{cases}$$

$$y_t(x,0)=0\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} d_n\omega_n \sin(\frac{n\pi x}{l})=0\Rightarrow \boxed{d_n=0}$$

حال کافی است بسط فوریه سینوسی $h(x)$ را بصورت زیر بنویسیم:

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin(\frac{n\pi x}{l}) \ , \quad h_n=\frac{2}{l}\int_0^l h(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx$$

$$h_n=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{2x\delta}{l}\sin(\frac{n\pi x}{l})dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{2(l-x)\delta}{l}\sin(\frac{n\pi x}{l})dx\right]$$

$$\boxed{h_n=\frac{8\delta}{n^2\pi^2}\sin(n\frac{\pi}{2})}\overset{n=2k-1}{\Rightarrow} h_{2k-1}=\frac{8\delta}{(2k-1)^2\pi^2}\sin[(2k-1)\frac{\pi}{2}]\Rightarrow \boxed{h_{2k-1}=\frac{8\delta(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2\pi^2}}$$

روش جداسازی متغیرها (Separation of Variables)– مثال ارتعاشات ریسمان

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{n\pi x}{l}) = h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin(\frac{n\pi x}{l})$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - h_n)\sin(\frac{n\pi x}{l}) = 0 \Rightarrow c_n = h_n = \frac{8\delta}{n^2\pi^2}\sin(n\frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \boxed{c_{2k-1} = h_{2k-1} = \frac{8\delta(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2\pi^2}}$$

$$\boxed{y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8\delta(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2\pi^2}\cos[(2k-1)\frac{\pi c t}{l}]\sin[(2k-1)\frac{\pi x}{l}]}$$

توجه:

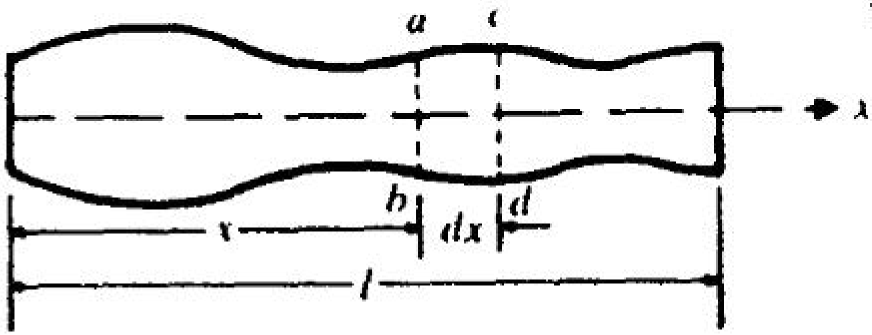
۱) در این مثال مشاهده می شود که تنها هارمونیک های فرد تحریک شده اند، یعنی تنها فرکانس های طبیعی فرد و مودهای ارتعاشی فرد در پاسخ y دیده می شوند.

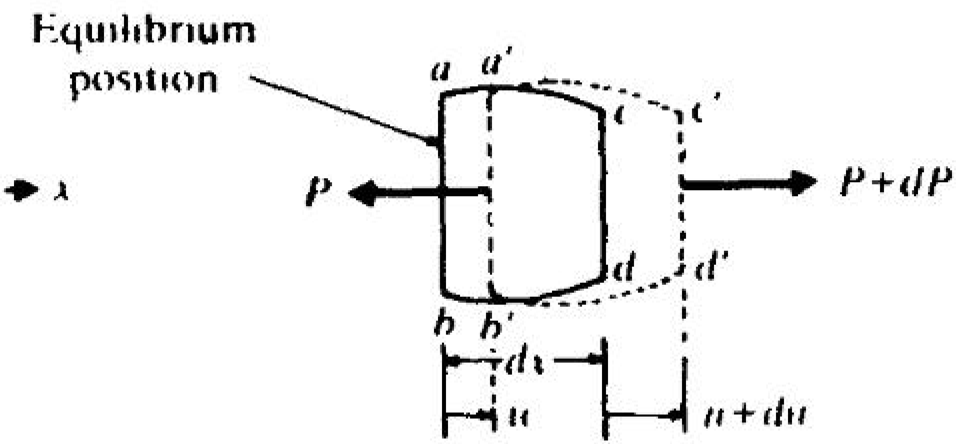
۲) اگر بجای وسط ریسمان، محل دیگری را بلند می کردیم، کلیه هارمونیکها تحریک می شدند و تنها جملات فرد را در پاسخ y ظاهر نمی شدند.

۳) اگر سرعت اولیه نیز در سیستم وجود می داشت، جملات کسینوسی دارای پارامتر زمان نیز در پاسخ وارد می شدند.

ارتعاشات طولی میله ها

میله ای با شعاع و خواص متغیر در طول را در نظر بگیرید که تحت نیروی گسترده برواحد طول *f(x,t)* قرار گرفته است. نیروی کششی در هر مقطع را با *P(x,t)* نشان می دهیم:





$$\varepsilon = \frac{l'-l}{l} = \frac{(dx + du) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad , \quad P = A\sigma = EA\varepsilon$$

$$\Rightarrow \boxed{P(x,t) = E(x)A(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}}$$

ارتعاشات طولی میله ها

• اگر معادله حرکت را برای المان بنویسیم:

$$\sum dF_x = (dm)a_x \Rightarrow (P + dP) - P + f dx = (\rho A\, dx)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} + f = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

در نتیجه معادله دیفرانسیل ارتعاشات طولی میله بصورت زیر است:

$$General\ PDE: \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left[E(x)A(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] + f = \rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}}$$

$$if\ \ EA = \text{constant} \Rightarrow \quad EA\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f = \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$if\ \ f(x,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad EA\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0}\ wave\ equation$$

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} : longitudinal\ wave\ \ propagation\ velocity$$

ارتعاشات طولی میله ها

شرایط مرزی: شرط مرزی اصلی (EBC) بر روی u و شرط مرزی طبیعی (NBC) بر روی P است که معمولاً بصورت $\partial u/\partial x$ در معادلات ظاهر می گردد. نوعی از شرایط مرزی وجود دارند که در آنها ترکیبی از u و $\partial u/\partial x$ مشاهده می شود. این شرایط نیز در واقع از نوع طبیعی هستند.

مثال: شرایط مرزی میله ای که در $x=0$ و $x=l$ ثابت شده باشد:

$$@x=0 \quad \rightarrow \quad u(0,t)=0$$
$$@x=l \quad \rightarrow \quad u(l,t)=0$$

مثال: شرایط مرزی میله ای که در $x=0$ ثابت و در $x=l$ آزاد باشد:

$$@x=0 \quad \rightarrow \quad u(0,t)=0$$
$$@x=l \quad \rightarrow \quad EA\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0 \rightarrow \quad u_x(l,t)=0$$

مثال: شرایط مرزی میله ای که در $x=0$ ثابت و در $x=l$ تحت نیروی F_0 باشد:

$$@x=0 \quad \rightarrow \quad u(0,t)=0$$
$$@x=l \quad \rightarrow \quad EA\frac{\partial \theta}{\partial x}\Big|_{x=l}=F_0 \rightarrow \quad u_x(l,t)=\frac{F_0}{E(l)A(l)}=\bar{F}$$

ارتعاشات طولی میله ها

مثال: شرایط مرزی میله ای که در $x=0$ ثابت و در $x=l$ نیز یک فنر با سختی K روی آن نصب شده باشد:

$$@x=0 \quad \rightarrow \quad u(0,t)=0$$

$$@x=l \quad \rightarrow \quad (EA\frac{\partial u}{\partial x})\Big|_{x=l}=-Ku\Big|_{x=l} \quad \rightarrow \quad \boxed{u_x(l,t)+\frac{K}{E(l)A(l)}u(l,t)=0}$$

در مثال فوق، مشاهده می شود که شرط مرزی طبیعی در $x=l$ بصورت ترکیبی از u و $\partial u/\partial x$ ظاهر شده است.

مثال: شرایط مرزی میله ای که در $x=0$ ثابت و در $x=l$ نیز جسمی با جرم M روی آن نصب شده باشد:

$$@x=0 \quad \rightarrow \quad u(0,t)=0$$

$$@x=l \quad \rightarrow \quad (EA\frac{\partial u}{\partial x})\Big|_{x=l}=-M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{x=l} \quad \rightarrow \quad \boxed{u_x(l,t)+\frac{M}{E(l)A(l)}u_{tt}(l,t)=0}$$

مثال) فرض کنید دو انتهای میله ای بطول l کاملاً ثابت شده اند. خواص مکانیکی و سطح مقطع میله را در طول میله ثابت فرض نمایید. در زمان $t=0$، جابجایی اولیه $h(x)$ و سرعت اولیه $g(x)$ به تمام نقاط میله اعمال می گردد. مطلوب است تعیین معادله ارتعاشات میله.

حل: ابتدا توجه داریم معادله دیفرانسیل پاره ای (PDE)، شرایط اولیه و شرایط مرزی مساله بصورت زیر می باشند:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$BCs \begin{cases} @x = 0 : u(0,t) = 0 \\ @x = l : u(l,t) = 0 \end{cases}$$

$$ICs \begin{cases} @t = 0 : u(x,0) = h(x) \\ @t = 0 : u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

روش جداسازی متغیرها (Separation of Variables)– مثال ارتعاشات طولی

مرحله ۱) می نویسیم:

$$u(x,t)=X(x)\;T(t)$$

مرحله ۲) تعیین مساله مقدار ویژه و حل برای $X(x)$: با قراردادن $u=XT$ در معادله اصلی و تقسیم کردن طرفین بر XT خواهیم داشت:

$$T''X=c^2X''T \qquad \Rightarrow \qquad \frac{T''(t)}{T(t)}=c^2\frac{X''(x)}{X(x)}$$

نکته مهم: از آنجا که سمت راست فقط تابع x و سمت چپ فقط تابع t است، پس باید طرفین تساوی مقادیر ثابتی باشند:

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=c^2\frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda \Rightarrow \begin{cases} T''(t)-\lambda T(t)=0 \\ X''(x)-\dfrac{\lambda}{c^2}X(x)=0 \end{cases}$$

از روی شرایط مرزی مساله، شرایطی را برای $X(x)$ در مرزها بدست می آوریم:

$$u(0,t)=X(0)T(t)=0 \quad \Rightarrow \quad X(0)=0$$
$$u(l,t)=X(l)T(t)=0 \quad \Rightarrow \quad X(l)=0$$

در نهایت مساله مقدار ویژه (Sturm-Liouville) بصورت زیر خواهد بود:

$$X''(x)-\frac{\lambda}{c^2}X(x)=0 \ , \quad X(0)=0 \ , \quad X(l)=0$$

در واقع λ مجهول اصلی است که باید تعیین شود و برای آن سه حالت بوجود می آید. باید مساله مقدار ویژه را برای هر سه حالت حل نمود.

$$\lambda>0 \ , \quad \lambda=0 \ , \quad \lambda<0$$

حالت اول: $\lambda=\alpha^2>0$ را درنظر بگیرید. در اینصورت برای $X(x)$ خواهیم داشت:

$$X''-\left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 X=0\rightarrow X(x)=Ae^{\frac{\alpha}{c}x}+Be^{-\frac{\alpha}{c}x}$$

با اعمال شرایط مرزی، به پاسخ صفر برای $u(x,t)$ می رسیم که قابل قبول نیست:

$$\begin{cases} X(0)=0\rightarrow A+B=0 \\ X(l)=0\rightarrow Ae^{\frac{\alpha}{c}l}+Be^{-\frac{\alpha}{c}l}=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow A=B=0\ \rightarrow\ X(x)=0\ \rightarrow u(x,t)=XT=0$$

حالت دوم: $\lambda=0$ را درنظر بگیرید. در اینصورت حل $X(x)$ بصورت زیر خواهد شد که بازهم قابل قبول نیست:

$$X''(x)=0\ \rightarrow\ X(x)=Ax+B$$

$$\begin{cases} X(0)=0\rightarrow B=0 \\ X(l)=0\rightarrow Al=0 \end{cases}\rightarrow\ X(x)=0\ \rightarrow u(x,t)=XT=0$$

روش جداسازی متغیرها (Separation of Variables)– مثال ارتعاشات طولی

حالت سوم: $\lambda = -\omega^2 < 0$ را درنظر بگیرید. در اینصورت برای $X(x)$ خواهیم داشت:

$$X'' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X = 0 \rightarrow X(x) = A\sin(\frac{\omega}{c}x) + B\cos(\frac{\omega}{c}x)$$

$$\begin{cases} X(0) = 0 \rightarrow B = 0 \\ X(l) = 0 \rightarrow A\sin(\frac{\omega}{c}l) = 0 \rightarrow \begin{cases} if\ \ A = 0 \rightarrow X(x) = 0 \rightarrow u(x,t) = 0 \\ if\ \ \sin(\frac{\omega}{c}l) = 0 \rightarrow \frac{\omega}{c}l = n\pi \end{cases} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\omega \equiv \omega_n} \boxed{\omega_n = \frac{n\pi c}{l}}, \qquad n = 1, 2, \ldots \ (eigenvalues)$$

$$\xrightarrow[A \equiv A_n]{X \equiv X_n} \boxed{X_n(x) = A_n \sin(\frac{n\pi x}{l})} \qquad (eigenfunctions)$$

نکته ۱: در این مثال خاص که بیانگر ارتعاشات طولی میله است، ω_n ها همان فرکانس های طبیعی ارتعاش میله و X_n ها شکل مودهای ارتعاش هستند.

نکته ۲: به عبارت دیگر، در حل مساله مقدار ویژه، شکل مودها و فرکانس های طبیعی را بدست آورده ایم.

نکته ۳: از آنجا که میله یک سیستم پیوسته (continuous) است، پس بینهایت فرکانس طبیعی و بینهایت شکل مود ارتعاشی دارد.

مرحله ۳) حال به تعیین $T(t)$ می پردازیم. از آنجا که بینهایت مقدار برای ω بدست آمده، پس بینهایت $T(t)$ نیز خواهیم داشت.

$$\xrightarrow{T\equiv T_n} T_n'' + \omega_n^2 T_n = 0 \rightarrow T_n(t) = C_n\cos(\omega_n t) + D_n\sin(\omega_n t)$$

$$\Rightarrow\ u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n[C_n\cos(\omega_n t) + D_n\sin(\omega_n t)]\sin(\frac{n\pi x}{l})$$

$$A_nC_n \equiv c_n\ ,\qquad A_nD_n \equiv d_n$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}[c_n\cos(\omega_n t) + d_n\sin(\omega_n t)]\sin(\frac{n\pi x}{l}) \\ u_t(x,t) &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n[-c_n\sin(\omega_n t) + d_n\cos(\omega_n t)]\sin(\frac{n\pi x}{l}) \end{aligned}}$$

مرحله ۴) حال باید ضرایب مجهول را از شرایط اولیه بدست آورد:

$$u(x,0)=h(x)\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=h(x)$$

$$u_t(x,0)=g(x)\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{n\pi c}{l}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=g(x)$$

حال کافی است بسط فوریه سینوسی $h(x)$ و $g(x)$ را بنویسیم:

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad , \quad h_n=\frac{2}{l}\int_0^l h(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad , \quad g_n=\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

در نتیجه داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - h_n)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{c_n = h_n = \frac{2}{l}\int_0^l h(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \omega_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

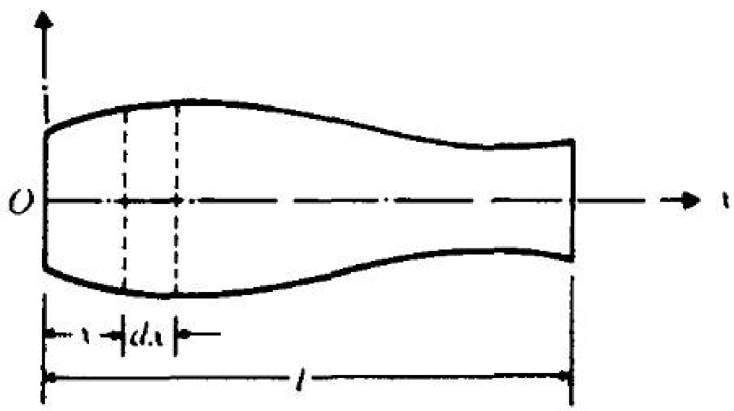
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\omega_n d_n - g_n)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{d_n = \frac{1}{\omega_n} g_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx}$$

در نهایت:

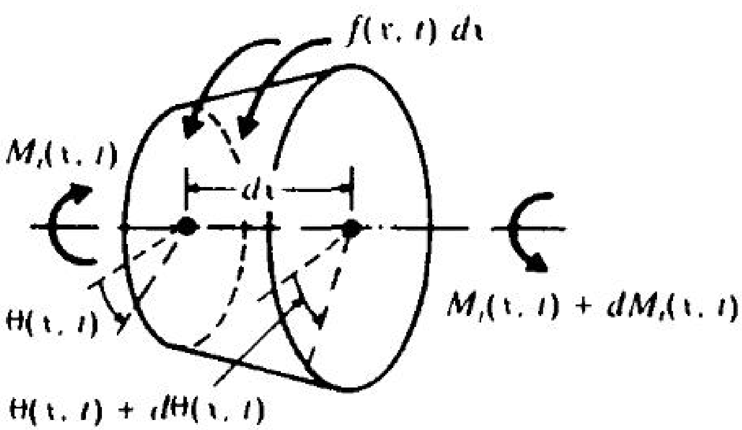
$$\boxed{\begin{aligned} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg\{ &\left(\frac{2}{l}\int_0^l h(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\right)\cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \\ &+ \left(\frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\right)\sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)\Bigg\}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \end{aligned}}$$

ارتعاشات پیچشی میله ها

میله ای با شعاع و خواص متغیر در طول را در نظر بگیرید که تحت گشتاور گسترده برواحد طول $f(x,t)$ قرار گرفته است. گشتاور پیچشی در هر مقطع را با $M(x,t)$ نشان می دهیم:



(a)



$$\theta = \frac{Ml}{GJ} \Rightarrow d\theta = \frac{M\,dx}{GJ}$$

$$\Rightarrow \; M(x,t) = G(x)J(x)\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}$$

اگر معادله حرکت را برای المان بنویسیم:

$$(M + dM) - M + f\,dx = (\rho J dx)\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

$$dM = \frac{\partial M}{\partial x}dx \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} + f = \rho J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

ارتعاشات پیچشی میله ها

در نتیجه معادله دیفرانسیل حرکت پیچشی میله بصورت زیر است:

$$General\ \ PDE:\ \ \boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left[G(x)J(x)\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right]+f=\rho(x)J(x)\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2}}$$

$$if\ \ GJ=\text{constant}\Rightarrow\quad GJ\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2}+f=\rho J\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2}$$

$$if\ \ f(x,t)=0\quad\Rightarrow\quad GJ\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2}=\rho J\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow\quad\boxed{\theta_{tt}-c^2\theta_{xx}=0}\ wave\ equation$$

$$c=\sqrt{\frac{G}{\rho}}:torsional\ wave\ \ propagation\ velocity$$

مشاهده می شود که معادله دیفرانسیل حرکت پیچشی میله همان معادله ارتعاشات طولی میله است. فقط ثابت c در دو معادله با یکدیگر متفاوت است.

ارتعاشات پیچشی میله ها

شرایط مرزی: شرط مرزی اصلی (EBC) بر روی θ و شرط مرزی طبیعی (NBC) بر روی M است که معمولاً بصورت $\partial\theta/\partial x$ در معادلات ظاهر می گردد. نوعی از شرایط مرزی وجود دارند که در آنها ترکیبی از θ و $\partial\theta/\partial x$ مشاهده می شود. این شرایط نیز در واقع از نوع طبیعی هستند.

مثال: شرایط مرزی میله ای که در $x=0$ و $x=l$ ثابت شده باشد:

$$@x=0 \quad \rightarrow \quad \theta(0,t)=0$$

$$@x=l \quad \rightarrow \quad \theta(l,t)=0$$

مثال: شرایط مرزی میله ای که در $x=0$ ثابت و در $x=l$ آزاد باشد:

$$@x=0 \quad \rightarrow \quad \theta(0,t)=0$$

$$@x=l \quad \rightarrow \quad GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}\Big|_{x=l}=0 \quad \rightarrow \quad \theta_x(l,t)=0$$

مثال: شرایط مرزی میله ای که در $x=0$ ثابت و در $x=l$ تحت گشتاور M_0 باشد:

$$@x=0 \quad \rightarrow \quad \theta(0,t)=0$$

$$@x=l \quad \rightarrow \quad GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}\Big|_{x=l}=M_0 \quad \rightarrow \quad \theta_x(l,t)=\frac{M_0}{G(l)J(l)}=\bar{M}$$

ارتعاشات پیچشی میله ها

مثال: شرایط مرزی میله ای که در $x=0$ ثابت و در $x=l$ نیز یک فنر پیچشی با سختی K روی آن نصب شده باشد:

$$@x=0 \quad \rightarrow \quad \theta(0,t)=0$$

$$@x=l \quad \rightarrow \quad (GJ\frac{\partial\theta}{\partial x})\Big|_{x=l}=-K\,\theta\Big|_{x=l} \quad \rightarrow \quad \boxed{\theta_x(l,t)+\frac{K}{G(l)J(l)}\theta(l,t)=0}$$

در مثال فوق، مشاهده می شود که شرط مرزی طبیعی در $x=l$ بصورت ترکیبی از θ و $\partial\theta/\partial x$ ظاهر شده است.

مثال: شرایط مرزی میله ای که در $x=0$ ثابت و در $x=l$ نیز جسمی با ممان اینرسی دورانی I روی آن نصب شده باشد:

$$@x=0 \quad \rightarrow \quad \theta(0,t)=0$$

$$@x=l \quad \rightarrow \quad (GJ\frac{\partial\theta}{\partial x})\Big|_{x=l}=-I\,\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\Big|_{x=l} \quad \rightarrow \quad \boxed{\theta_x(l,t)+\frac{I}{G(l)J(l)}\theta_{tt}(l,t)=0}$$

مثال) فرض کنید یک انتهای میله ای بطول l کاملاً ثابت شده و انتهای دیگر آن آزاد است. خواص مکانیکی و سطح مقطع میله را در طول میله ثابت فرض نمایید. در زمان $t=0$، دوران اولیه $h(x)$ و سرعت زاویه ای اولیه $g(x)$ به تمام نقاط میله اعمال می گردد. مطلوب است تعیین معادله ارتعاشات پیچشی میله.

حل: معادله دیفرانسیل پاره ای (PDE)، شرایط اولیه و شرایط مرزی مساله بصورت زیر می باشند:

$$\theta_{tt} - c^2\theta_{xx} = 0 \ , \quad c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

$$BCs \begin{cases} @x = 0: \ \theta(0,t) = 0 \\ @x = l: \ \theta_x(l,t) = 0 \end{cases}$$

$$ICs \begin{cases} @t = 0: \ \theta(x,0) = h(x) \\ @t = 0: \ \theta_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

مرحله ۱) می نویسیم:

$$\theta(x,t) = X(x)T(t)$$

مرحله ۲) تعیین مساله مقدار ویژه و حل برای $X(x)$: با قراردادن $\theta=XT$ در معادله اصلی و تقسیم کردن طرفین بر XT خواهیم داشت:

$$T''X = c^2 X''T \qquad \Rightarrow \qquad \frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}$$

نکته مهم: از آنجا که سمت راست فقط تابع x و سمت چپ فقط تابع t است، پس باید طرفین تساوی مقادیر ثابتی باشند:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} T''(t) - \lambda T(t) = 0 \\ X''(x) - \dfrac{\lambda}{c^2} X(x) = 0 \end{cases}$$

از روی شرایط مرزی مساله، شرایطی را برای $X(x)$ در مرزها بدست می آوریم:

$$\theta(0,t)=X(0)T(t)=0 \quad \rightarrow \quad X(0)=0$$

اما در $x=l$ داریم:

$$\theta_x(l,t)=X'(l)T(t)=0 \quad \rightarrow \quad X'(l)=0$$

در نهایت مساله مقدار ویژه (Sturm-Liouville) بصورت زیر خواهد بود:

$$X''(x)-\frac{\lambda}{c^2}X(x)=0 \;, \quad X(0)=0 \;, \quad X'(l)=0$$

در واقع λ مجهول اصلی است که باید تعیین شود و برای آن سه حالت بوجود می آید. باید مساله مقدار ویژه را برای هر سه حالت حل نمود.

$$\lambda>0 \;, \quad \lambda=0, \quad \lambda<0$$

حالت اول: $\lambda = \alpha^2 > 0$ را درنظر بگیرید. در اینصورت برای $X(x)$ خواهیم داشت:

$$X'' - \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 X = 0 \rightarrow X(x) = Ae^{\frac{\alpha}{c}x} + Be^{-\frac{\alpha}{c}x}$$

با اعمال شرایط مرزی، به پاسخ صفر برای $\theta(x,t)$ می رسیم که قابل قبول نیست:

$$\begin{cases} X(0) = 0 \rightarrow A + B = 0 \\ X'(l) = 0 \rightarrow \dfrac{\alpha}{c}\left(Ae^{\frac{\alpha}{c}l} - Be^{-\frac{\alpha}{c}l}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow A = B = 0 \rightarrow X(x) = 0 \rightarrow \theta(x,t) = XT = 0$$

حالت دوم: $\lambda = 0$ را درنظر بگیرید. در اینصورت حل $X(x)$ بصورت زیر خواهد شد که بازهم قابل قبول نیست:

$$X''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad X(x) = Ax + B$$

$$\begin{cases} X(0) = 0 \rightarrow B = 0 \\ X'(l) = 0 \rightarrow A = 0 \end{cases} \rightarrow X(x) = 0 \rightarrow \theta(x,t) = XT = 0$$

حالت سوم: $\lambda = -\omega^2 < 0$ را درنظر بگیرید. در اینصورت برای $X(x)$ خواهیم داشت:

$$X'' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X = 0 \rightarrow X(x) = A\sin(\frac{\omega}{c}x) + B\cos(\frac{\omega}{c}x)$$

$$\begin{cases} X(0) = 0 \rightarrow B = 0 \\ X'(l) = 0 \rightarrow \dfrac{\omega}{c}A\cos(\dfrac{\omega}{c}l) = 0 \rightarrow \begin{cases} if \;\; A = 0 \rightarrow X(x) = 0 \rightarrow \theta(x,t) = 0 \\ if \;\; \cos(\dfrac{\omega}{c}l) = 0 \rightarrow \dfrac{\omega}{c}l = (2n-1)\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\omega \equiv \omega_n} \boxed{\omega_n = (2n-1)\frac{\pi c}{2l}}, \qquad n = 1,2,\ldots \;\; (eigenvalues)$$

$$\xrightarrow[A \equiv A_n]{X \equiv X_n} \boxed{X_n(x) = A_n \sin[(2n-1)\frac{\pi x}{2l}]} \qquad (eigenfunctions)$$

نکته ۱: در این مثال خاص که بیانگر ارتعاشات پیچشی میله است، ω_nها همان فرکانس های طبیعی ارتعاش میله و X_nها شکل مودهای ارتعاش هستند.

نکته ۲: به عبارت دیگر، در حل مساله مقدار ویژه، شکل مودها و فرکانس های طبیعی را بدست آورده ایم.

نکته ۳: از آنجا که میله یک سیستم پیوسته (continuous) است، پس بینهایت فرکانس طبیعی و بینهایت شکل مود ارتعاشی دارد.

مرحله ۳) حال به تعیین $T(t)$ می پردازیم. از آنجا که بینهایت مقدار برای ω بدست آمده، پس بینهایت $T(t)$ نیز خواهیم داشت.

$$\xrightarrow{T\equiv T_n} T_n''+\omega_n^2 T_n=0 \to T_n(t)=C_n\cos[(2n-1)\frac{\pi ct}{2l}]+D_n\sin[(2n-1)\frac{\pi ct}{2l}]$$

$$\Rightarrow\ \theta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left\{C_n\cos[(2n-1)\frac{\pi ct}{2l}]+D_n\sin[(2n-1)\frac{\pi ct}{2l}]\right\}\sin[(2n-1)\frac{\pi x}{2l}]$$

$$A_nC_n\equiv a_n\ ,\qquad A_nD_n\equiv b_n$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\theta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos[(2n-1)\frac{\pi ct}{2l}]+b_n\sin[(2n-1)\frac{\pi ct}{2l}]\right\}\sin[(2n-1)\frac{\pi x}{2l}]\\&\theta_t(x,t)=\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\frac{\pi c}{2l}\left\{-a_n\sin[(2n-1)\frac{\pi ct}{2l}]+b_n\cos[(2n-1)\frac{\pi ct}{2l}]\right\}\sin[(2n-1)\frac{\pi x}{2l}]\end{aligned}}$$

مرحله ۴) حال باید ضرایب مجهول را از شرایط اولیه بدست آورد:

$$\theta(x,0)=h(x)\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin[\frac{(2n-1)\pi x}{2l}]=h(x)$$

$$\theta_t(x,0)=g(x)\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{(2n-1)\pi c}{2l}\sin[\frac{(2n-1)\pi x}{2l}]=g(x)$$

حال کافی است بسط فوریه سینوسی $h(x)$ و $g(x)$ را بصورت زیر بنویسیم:

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}h_n\sin[\frac{(2n-1)\pi x}{2l}]\ ,\quad h_n=\frac{2}{l}\int_0^l h(x)\sin[\frac{(2n-1)\pi x}{2l}]dx$$

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n\sin[\frac{(2n-1)\pi x}{2l}]\ ,\quad g_n=\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin[\frac{(2n-1)\pi x}{2l}]dx$$

در نتیجه داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin[\frac{(2n-1)\pi x}{2l}] = h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin[\frac{(2n-1)\pi x}{2l}]$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - h_n) \sin[\frac{(2n-1)\pi x}{2l}] = 0 \Rightarrow \boxed{a_n = h_n = \frac{2}{l}\int_0^l h(x)\sin([\frac{(2n-1)\pi x}{2l}]dx}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n [\frac{(2n-1)\pi c}{2l}] \sin[\frac{(2n-1)\pi x}{2l}] = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin[\frac{(2n-1)\pi x}{2l}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{(2n-1)\pi c}{2l} b_n - g_n) \sin([\frac{(2n-1)\pi x}{2l}]) = 0$$

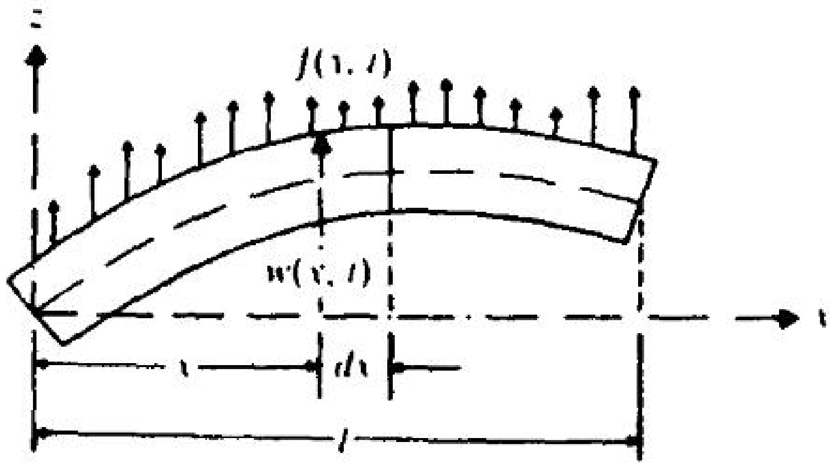
$$\Rightarrow \boxed{b_n = \frac{2l}{(2n-1)\pi c} g_n = \frac{1}{(2n-1)\pi c}\int_0^l g(x)\sin[\frac{(2n-1)\pi x}{2l}]\,dx}$$

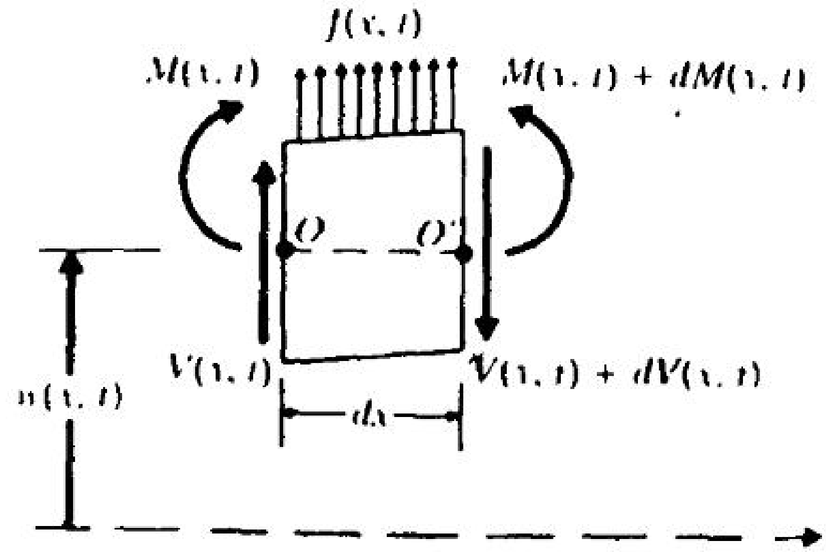
توجه:

در حل مثال قبل، بجای $\sin(\frac{n\pi x}{l})$ از $\sin[\frac{(2n-1)\pi x}{2l}]$ استفاده شد. به این سری جدید، سری فوریه تعمیم یافته گویند. در فصل بعد، در مورد سری فوریه تعمیم یافته بیشتر صحبت خواهد شد.

ارتعاشات خمشی تیرها، تئوری اویلر– برنولی

فرض کنید یک تیر تحت نیروی گسترده برواحد طول *f(x,t)* قرار گرفته است. در تئوری اویلر–برنولی، میدان جابجایی بصورت زیر است:





$$u=-z\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\quad,\qquad w\approx w(x,t)$$

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=-z\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2},\quad \sigma_x=E(x)\varepsilon_x$$

$$M=-\iint_{A(x)} z\,\sigma_x\,dA\Rightarrow\boxed{M(x,t)=E(x)I(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}}$$

معادلات حرکت و در نتیجه معادله دیفرانسیل حرکت بصورت زیر بدست می آیند:

$$\sum dF_z = (dm)a_z \to V - (V + \frac{\partial V}{\partial x}dx) + fdx = (\rho A\, dx)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{\partial V}{\partial x} + f = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}}$$

$$\sum dM_y = 0 \to (M + \frac{\partial M}{\partial x}dx) - M - (V + \frac{\partial V}{\partial x}dx)\frac{dx}{2} - V\frac{dx}{2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(dx)^2 \approx 0 \Rightarrow \boxed{V = \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[E(x)I(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}]}$$

$$General\ PDE: \boxed{-\frac{\partial^2}{\partial x^2}[E(x)I(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}] + f = \rho(x)A(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}}$$

$$if\ EI = \text{constant} \Rightarrow \quad -EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + f = \rho A\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$

$$if\ f(x,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad -EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = \rho A\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{w_{xxxx} + \frac{\rho A}{EI}w_{tt} = 0}$$

شرایط مرزی: شرط مرزی اصلی (EBC) بر روی w و $\partial w/\partial x$ و شرط مرزی طبیعی (NBC) بر روی V و M است که معمولاً بصورت $\partial^3 w/\partial x^3$ و $\partial^2 w/\partial x^2$ در معادلات ظاهر می گردد. شرایط مرزی ترکیبی نیز وجود دارند که در واقع از نوع طبیعی هستند.

مثال: شرایط مرزی تیری که در $x=0$ گیردار و در $x=l$ آزاد باشد (تیر یکسر گیردار)

$$@x=0 \quad \rightarrow \quad w(0,t)=0 \;,\quad w_x(0,t)=0$$

$$@x=l \quad \rightarrow \quad \begin{cases} M=EI\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=l}=0 \rightarrow w_{xx}(l,t)=0 \\ V=EI\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}\Big|_{x=l}=0 \rightarrow w_{xxx}(l,t)=0 \end{cases}$$

مثال: شرایط مرزی تیر دو سر مفصل

$$@x=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} w(0,t)=0 \\ M=EI\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=0}=0 \rightarrow w_{xx}(0,t)=0 \end{cases}$$

$$@x=l \quad \rightarrow \quad \begin{cases} w(l,t)=0 \\ M=EI\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=l}=0 \rightarrow w_{xx}(l,t)=0 \end{cases}$$

ارتعاشات خمشی تیرها، تئوری اویلر – برنولی

مثال: شرایط مرزی تیری که در $x=0$ گیردار و در $x=l$ تحت گشتاور M_0 باشد.

$$@x=0 \quad \rightarrow w(0,t)=0 \;, \quad w_x(0,t)=0$$

$$@x=l \quad \rightarrow \begin{cases} M=EI\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=l}=M_0 \rightarrow w_{xx}(l,t)=\dfrac{M_0}{EI}=\bar{M} \\ V=EI\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}\Big|_{x=l}=0 \rightarrow w_{xxx}(l,t)=0 \end{cases}$$

مثال: شرایط مرزی تیری یکسر گیردار که در انتهای $x=l$ به یک فنر قائم (در راستای z) با سختی K متصل است:

$$@x=0 \quad \rightarrow w(0,t)=0 \;, \quad w_x(0,t)=0$$

$$@x=l \quad \rightarrow \begin{cases} M=EI\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=l}=0 \rightarrow w_{xx}(l,t)=0 \\ EI\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}\Big|_{x=l}+Kw\Big|_{x=l}=0 \rightarrow w_{xxx}(l,t)+\dfrac{K}{EI}w(l,t)=0 \end{cases}$$

مثال: شرایط مرزی تیر یکسر گیردار (در $x=l$) و یک سر مفصل (در انتهای $x=l$)

$$@x=0 \quad \rightarrow w(0,t)=0 \;, \quad w_x(0,t)=0$$

$$@x=l \quad \rightarrow \begin{cases} w(l,t)=0 \\ M=EI\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=l}=0 \rightarrow w_{xx}(l,t)=0 \end{cases}$$

مثال: شرایط مرزی تیری یکسر گیردار که در انتهای $x=l$ به جسمی به جرم M متصل است و جرم با تیر در راستای z نوسان می کند.

$$@x=0 \quad \rightarrow w(0,t)=0 \;, \quad w_x(0,t)=0$$

$$@x=l \quad \rightarrow \begin{cases} M=EI\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=l}=0 \rightarrow w_{xx}(l,t)=0 \\ EI\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}\Big|_{x=l}+M\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}\Big|_{x=l}=0 \rightarrow w_{xxx}(l,t)+\dfrac{M}{EI}w_{tt}(l,t)=0 \end{cases}$$

مثال) فرض کنید یک تیر اویلر-برتولی بر روی دو تکیه گاه مفصلی قرار گرفته است. اگر در زمان $t=0$، خیز نقاط مختلف تیر بصورت تابع $h(x)$ باشد، فرکانس های طبیعی، شکل مودها و پاسخ نوسانی تیر را بدست آورید.

حل: معادله دیفرانسیل پاره ای (PDE)، شرایط اولیه و شرایط مرزی مساله بصورت زیر می باشند:

$$w_{xxxx}+\frac{\rho A}{EI}w_{tt}=0$$

$$BSs\begin{cases} @x=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} w(0,t)=0 \\ w_{xx}(0,t)=0 \end{cases} \\ @x=l \quad \rightarrow \quad \begin{cases} w(l,t)=0 \\ w_{xx}(l,t)=0 \end{cases} \end{cases}$$

$$ICs\begin{cases} @t=0: w(x,0)=h(x) \\ @t=0: w_t(x,0)=0 \end{cases}$$

مرحله ۱) می نویسیم:

$$w(x,t)=X(x)T(t)$$

مرحله ۲) تعیین مساله مقدار ویژه و حل برای $X(x)$: با قراردادن $w=XT$ در معادله اصلی و تقسیم کردن طرفین بر XT خواهیم داشت:

$$X^{(4)}T=-\frac{\rho A}{EI}XT'' \qquad \Rightarrow \qquad \frac{T''(t)}{T(t)}=-\frac{EI}{\rho A}\frac{X^{(4)}(x)}{X(x)}$$

نکته مهم: از آنجا که سمت راست فقط تابع x و سمت چپ فقط تابع t است، پس باید طرفین تساوی مقادیر ثابتی باشند:

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=-\frac{EI}{\rho A}\frac{X^{(4)}(x)}{X(x)}=\lambda \Rightarrow \begin{cases} T''(t)-\lambda T(t)=0 \\ X^{(4)}(x)+\dfrac{\lambda\rho A}{EI}X(x)=0 \end{cases}$$

روش جداسازی متغیرها (Separation of Variables)– مثال ارتعاشات تیر

از روی شرایط مرزی مساله، شرایطی را برای $X(x)$ در مرزها بدست می آوریم:

$$w(0,t)=X(0)T(t)=0 \quad \rightarrow \quad X(0)=0$$

$$w_{xx}(0,t)=X''(0)T(t)=0 \quad \rightarrow \quad X''(0)=0$$

$$w(l,t)=X(l)T(t)=0 \quad \rightarrow \quad X(l)=0$$

$$w_{xx}(l,t)=X''(l)T(t)=0 \quad \rightarrow \quad X''(l)=0$$

در نهایت مساله مقدار ویژه (Sturm-Liouville) بصورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{\begin{array}{l} X^{(4)}(x)+\dfrac{\lambda\rho A}{EI}X(x)=0 \\ X(0)=0\ , \quad X''(0)=0, \quad X(l)=0\ , \quad X''(l)=0 \end{array}}$$

در واقع λ مجهول اصلی است که باید تعیین شود و برای آن سه حالت بوجود می آید. باید مساله مقدار ویژه را برای هر سه حالت حل نمود.

$$\lambda>0\ , \qquad \lambda=0, \qquad \lambda<0$$

روش جداسازی متغیرها (Separation of Variables) – مثال ارتعاشات تیر

حالت های اول و دوم: $\lambda=\alpha^2>0$ و $\lambda=0$: در این دو حالت، به سادگی می توان نشان داد که تنها جواب صفر برای $X(x)$ و در نتیجه $w(x,t)$ بدست می آید که قابل قبول نیست.

حالت سوم: $\lambda=-\omega^2<0$ را درنظر بگیرید. در اینصورت برای $X(x)$ خواهیم داشت:

$$X^{(4)}(x)-\frac{\omega^2\rho A}{EI}X(x)=0 \quad , \quad let \;\; \beta^4=\frac{\omega^2\rho A}{EI}$$

$$\to X^{(4)}(x)-\beta^4X(x)=0 \quad , \quad let \; X(x)=e^{rx}$$

$$\to r^4-\beta^4=(r^2+\beta^2)(r^2-\beta^2)=0\to(r-i\beta)(r+i\beta)(r-\beta)(r+\beta)=0$$

$$\to r_1=i\beta,\; r_2=-i\beta,\; r_3=\beta,\; r_4=-\beta,$$

$$\to \boxed{X(x)=C_1\sin(\beta x)+C_2\cos(\beta x)+C_3\sinh(\beta x)+C_4\cosh(\beta x)}$$

$$\to \boxed{X''(x)=\beta^2\left[-C_1\sin(\beta x)-C_2\cos(\beta x)+C_3\sinh(\beta x)+C_4\cosh(\beta x)\right]}$$

$$\left.\begin{array}{l} X(0)=0\to \quad C_2+C_4=0 \\ X''(0)=0\to -C_2+C_4=0 \end{array}\right\}\Rightarrow C_2=C_4=0$$

روش جداسازی متغیرها (Separation of Variables)– مثال ارتعاشات تیر

$$\rightarrow X(x) = C_1 \sin(\beta x) + C_3 \sinh(\beta x)$$

$$\rightarrow X''(x) = \beta^2\left[-C_1 \sin(\beta x) + C_3 \sinh(\beta x)\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} X(l)=0 \rightarrow \quad C_1 \sin(\beta l) + C_3 \sinh(\beta l) = 0 \\ X''(0)=0 \rightarrow -C_1 \sin(\beta l) + C_3 \sinh(\beta l) = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\oplus} C_3 \sinh(\beta l) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$\rightarrow C_1 \sin(\beta l) = 0 \rightarrow \begin{cases} if \;\; C_1 = 0 \rightarrow X(x) = 0 \rightarrow w(x,t) = 0 \\ if \;\; \sin(\beta l) = 0 \rightarrow \beta l = n\pi \end{cases}$$

$$\overset{\beta\equiv\beta_n}{\Rightarrow} \beta_n = \frac{n\pi}{l} \rightarrow \omega_n = \beta_n^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (n\pi)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

$$\rho A l = M \rightarrow \boxed{\omega_n = (n\pi)^2\sqrt{\frac{EI}{Ml^3}}} \qquad n = 1, 2, \ldots \;\; (eigenvalues)$$

$$\overset{\substack{X\equiv X_n \\ C_1\equiv C_{1n}}}{\Rightarrow} \boxed{X_n(x) = C_{1n} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)} \qquad (eigenfunctions)$$

مرحله ۳) حال به تعیین $T(t)$ می پردازیم. از آنجا که بینهایت مقدار برای ω بدست آمده، پس بینهایت $T(t)$ نیز خواهیم داشت.

$$\omega_n = (n\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{Ml^3}}$$

$$\overset{T \equiv T_n}{\Rightarrow} T_n'' + \omega_n^2 T_n = 0 \rightarrow T_n(t) = D_n \cos(\omega_n t) + E_n \sin(\omega_n t)$$

$$\Rightarrow w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} \{D_n \cos(\omega_n t) + E_n \sin(\omega_n t)\} \sin(\frac{n\pi x}{l})$$

$$C_{1n} D_n \equiv c_n \ , \quad C_{1n} E_n \equiv d_n$$

$$\boxed{w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{c_n \cos(\omega_n t) + d_n \sin(\omega_n t)\} \sin(\frac{n\pi x}{l})}$$

$$\boxed{w_t(x,t) = \frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \{-c_n \sin(\omega_n t) + d_n \cos(\omega_n t)\} \sin(\frac{n\pi x}{l})}$$

مرحله ۴) حال باید ضرایب مجهول را از شرایط اولیه بدست آورد:

$$w(x,0)=h(x)\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{n\pi x}{l})=h(x)$$

$$w_t(x,0)=0\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} d_n \omega_n \sin(\frac{n\pi x}{l})=0\Rightarrow \boxed{d_n=0}$$

حال کافی است بسط فوریه سینوسی $h(x)$ را بصورت زیر بنویسیم:

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin(\frac{n\pi x}{l}) \ , \quad h_n=\frac{2}{l}\int_0^l h(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{n\pi x}{l})=h(x)=\sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin(\frac{n\pi x}{l})$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (c_n-h_n)\sin(\frac{n\pi x}{l})=0\ \Rightarrow\ c_n=h_n=\frac{2}{l}\int_0^l h(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} w(x,t)&=\sum_{k=1}^{\infty} c_n \cos(\omega_n t)\sin(\frac{n\pi x}{l})\\ &=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l h(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx\right)\cos[(n\pi)^2\sqrt{\frac{EI}{Ml^3}}\,t]\sin(\frac{n\pi x}{l})\end{aligned}}$$

انتقال حرارت در جامدات (Conduction)

گرما از مکانی با دمای بیشتر به جایی با دمای کمتر انتقال می یابد. براین اساس، اگر q شار حرارتی (یعنی توان حرارتی بر واحد سطح)، k ضریب هدایت گرمایی و θ دما باشد، قانون انتقال حرارت جابجایی فوریه بصورت زیر است:

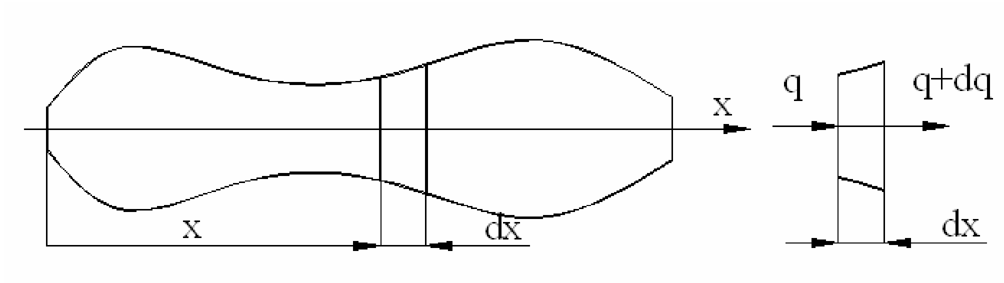
$$\vec{q} = -k\,\vec{\nabla}\,\theta \quad , \qquad \vec{\nabla}\,\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \theta}{\partial z}\vec{k}$$

اگر این قانون را در یک بعد، بین دو نقطه ۱ و ۲ با فاصله Δx ($x_2>x_1$) بنویسیم، شار حرارتی انتقال یافته از نقطه ۱ به نقطه ۲ بصورت زیر محاسبه می شود. اگر دمای نقطه ۱ بیشتر باشد، شار انتقال یافته مثبت است، وگر نه شار از نقطه ۲ به ۱ منتقل می شود:

$$q_{1\to 2} = -k\,\frac{\Delta\theta}{\Delta x} = -k\,\frac{\theta_2 - \theta_1}{x_2 - x_1}$$

حال انتقال حرارت یک بعدی در یک جسم (مانند یک میله) را در نظر بگیرید. از قانون اول ترمودینامیک، نرخ خالص ورود انرژی به داخل جسم، برابر با نرخ افزایش انرژی داخلی آن خواهد بود. پارامتر g را بعنوان توان حرارتی تولید شده بر واحد حجم جسم بگیرید.

انتقال حرارت در جامدات (Conduction)



$$[q-(q+dq)]A+g\,dV=\rho C_p dV\frac{\partial\theta}{\partial t}\quad,\quad dV=A\,dx\,,\ dq=\frac{\partial q}{\partial x}dx=\frac{\partial}{\partial x}(-k\frac{\partial\theta}{\partial x})dx$$

$$\textit{General PDE}: \boxed{\frac{\partial}{\partial x}[k(x)\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}]+g(x,t)=\rho(x)C_p(x)\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}}$$

$$\textit{if}\ \ K=\text{constant}\Rightarrow\quad k\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2}+g=\rho C_p\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}$$

$$\textit{if}\ \ g(x,t)=0\quad\Rightarrow\quad k\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2}=\rho C_p\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}$$

$$\Rightarrow\quad\boxed{\theta_t-\alpha^2\theta_{xx}=0}\ \text{1-D heat conduction equ.}$$

$$\alpha=\sqrt{\frac{k}{\rho C_p}}:\textit{thermal diffusivity}$$

انتقال حرارت در جامدات (Conduction)

اگر روند فوق را برای جسم سه بعدی بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\theta = \theta(x,y,z,t),\ \ g = g(x,y,z,t)\ ,k = k(x,y,z)$$
$$\rho = \rho(x,y,z)\ ,\ C_p = C_p(x,y,z)$$

$$General\ PDE:\ \boxed{\frac{\partial}{\partial x}[k\frac{\partial\theta}{\partial x}]+\frac{\partial}{\partial y}[k\frac{\partial\theta}{\partial y}]+\frac{\partial}{\partial z}[k\frac{\partial\theta}{\partial z}]+g = \rho C_p\frac{\partial\theta}{\partial t}}$$

$$if\ \ k = \text{constant} \Rightarrow \quad k\nabla^2\theta + g = \rho C_p\frac{\partial\theta}{\partial t}$$

$$if\ \ g = 0 \quad \Rightarrow \quad k\nabla^2\theta = \rho C_p\frac{\partial\theta}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_t - \alpha^2\nabla^2\theta = 0}$$

$$if\ \ \frac{\partial\theta}{\partial t} = 0\ (steady) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla^2\theta = 0}\ : Laplace\ Equ.$$

قانون انتقال حرارت جابجایی $(Convection)$ نیوتون: اگر سطح جسمی دارای دمای θ_s و جریان سیال روی آن دارای دمای θ_∞ باشد، شار حرارتی انتقال یافته از طرف جسم به سیال از معادله زیر بدست می آید که در آن h ضریب انتقال حرارت جابجایی است:

$$q = h(\theta_s - \theta_\infty)$$

انتقال حرارت در جامدات (Conduction)

شرایط مرزی: شرط مرزی اصلی (EBC) بر روی θ و شرط مرزی طبیعی (NBC) بر روی q است که معمولاً بصورت $\partial\theta/\partial x$ در معادلات ظاهر می گردد. نوعی از شرایط مرزی وجود دارند که در آنها ترکیبی از θ و $\partial\theta/\partial x$ مشاهده می شود. این شرایط نیز در واقع از نوع طبیعی هستند.

مثال: شرایط مرزی میله ای که دمای آن در $x=0$ و $x=l$ مشخص باشد:

$$@x=0 \quad \rightarrow \quad \theta(0,t)=\theta_1$$

$$@x=l \quad \rightarrow \quad \theta(l,t)=\theta_2$$

مثال: شرایط مرزی میله ای که در $x=0$ دارای دمای مشخص و در $x=l$ عایق شده باشد:

$$@x=0 \quad \rightarrow \quad \theta(0,t)=0$$

$$@x=l \quad \rightarrow \quad -k\frac{\partial\theta}{\partial x}\Big|_{x=l}=0 \rightarrow \quad \theta_x(l,t)=0$$

مثال: شرایط مرزی میله ای که در $x=0$ عایق شده و در $x=l$ تحت شار حرارتی ورودی q_0 باشد:

$$@x=0 \quad \rightarrow \quad -k\frac{\partial\theta}{\partial x}\Big|_{x=0}=0 \quad \rightarrow \quad \theta_x(0,t)=0$$

$$@x=l \quad \rightarrow \quad -k\frac{\partial\theta}{\partial x}\Big|_{x=l}=-q_0 \rightarrow \quad \theta_x(l,t)=\frac{q_0}{k(l)}=\bar{q}$$

انتقال حرارت در جامدات (Conduction)

مثال: شرایط مرزی میله ای که در $x=0$ دارای دمای ثابت صفر درجه و در $x=l$ نیز جریان سیالی با دمای θ_∞ و ضریب انتقال حرارت h به آن برخورد کند.

$$@x=0 \quad \rightarrow \quad \theta(0,t)=0$$

$$@x=l \quad \rightarrow \quad -(k\frac{\partial\theta}{\partial x})\Big|_{x=l}=h(\theta-\theta_\infty)\Big|_{x=l}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\theta_x(l,t)+\frac{h}{k(l)}\theta(l,t)=\frac{h\theta_\infty}{k(l)}}$$

در مثال فوق، مشاهده می شود که شرط مرزی طبیعی در $x=l$ بصورت ترکیبی از θ و $\partial\theta/\partial x$ ظاهر شده است.

روش جداسازی متغیرها (Separation of Variables)– مثال انتقال حرارت

مثال) فرض کنید در زمان $t=0$، دمای اولیه کلیه نقاط یک میله برابر با تابع $S(x)$ است. دو انتهای میله ای بطول l را در داخل یخ صفر درجه قرار می دهیم. مطلوب است تعیین معادله دمای نقاط مختلف میله بر حسب زمان و مکان.

حل: معادله دیفرانسیل پاره ای (PDE)، شرایط اولیه و شرایط مرزی مساله بصورت زیر می باشند:

$$\theta_t - \alpha^2 \theta_{xx} = 0, \quad \alpha = \sqrt{\frac{k}{\rho C_p}}$$

$$BCs \begin{cases} @\, x = 0 : \ \theta(0,t) = 0 \\ @\, x = l : \ \theta(l,t) = 0 \end{cases}$$

$$IC : \ @\, t = 0 : \ \theta(x,0) = S(x)$$

مرحله ۱) می نویسیم:

$$\theta(x,t) = X(x)\ T(t)$$

مرحله ۲) تعیین مساله مقدار ویژه و حل برای $X(x)$: با قراردادن $\theta = XT$ در معادله اصلی و تقسیم کردن طرفین بر XT خواهیم داشت:

$$T'X = \alpha^2 X''T \qquad \Rightarrow \qquad \frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha^2 \frac{X''(x)}{X(x)}$$

نکته مهم: از آنجا که سمت راست فقط تابع x و سمت چپ فقط تابع t است، پس باید طرفین تساوی مقادیر ثابتی باشند:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \ \Rightarrow \begin{cases} T'(t) - \lambda T(t) = 0 \\ X''(x) - \dfrac{\lambda}{\alpha^2} X(x) = 0 \end{cases}$$

روش جداسازی متغیرها (Separation of Variables)– مثال انتقال حرارت

از روی شرایط مرزی مساله، شرایطی را برای $X(x)$ در مرزها بدست می آوریم:

$$\theta(0,t)=X(0)T(t)=0 \quad \Rightarrow \quad X(0)=0$$
$$\theta(l,t)=X(l)T(t)=0 \quad \Rightarrow \quad X(l)=0$$

در نهایت مساله مقدار ویژه (Sturm-Liouville) بصورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{X''(x)-\frac{\lambda}{\alpha^2}X(x)=0\ , \quad X(0)=0\ , \quad X(l)=0}$$

در واقع λ مجهول اصلی است که باید تعیین شود و برای آن سه حالت بوجود می آید. باید مساله مقدار ویژه را برای هر سه حالت حل نمود.

$$\lambda>0\ , \qquad \lambda=0, \qquad \lambda<0$$

روش جداسازی متغیرها (Separation of Variables)– مثال انتقال حرارت

حالت های اول و دوم: $\lambda = \beta^2 > 0$ و $\lambda = 0$: در این دو حالت، به سادگی می توان نشان داد که تنها جواب صفر برای $X(x)$ و در نتیجه $\theta(x,t)$ بدست می آید که قابل قبول نیست.

حالت سوم: $\lambda = -\omega^2 < 0$ را درنظر بگیرید. در اینصورت برای $X(x)$ خواهیم داشت:

$$X'' + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 X = 0 \rightarrow X(x) = A\sin\left(\frac{\omega}{\alpha}x\right) + B\cos\left(\frac{\omega}{\alpha}x\right)$$

$$\begin{cases} X(0) = 0 \rightarrow B = 0 \\ X(l) = 0 \rightarrow A\sin\left(\frac{\omega}{\alpha}l\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} if\ \ A = 0 \rightarrow X(x) = 0 \rightarrow \theta(x,t) = 0 \\ if\ \ \sin\left(\frac{\omega}{\alpha}l\right) = 0 \rightarrow \frac{\omega}{\alpha}l = n\pi \end{cases} \end{cases}$$

$$\overset{\omega \equiv \omega_n}{\Rightarrow} \boxed{\omega_n = \frac{n\pi\alpha}{l}}, \qquad n = 1, 2, \ldots\ (eigenvalues)$$

$$\overset{\substack{X \equiv X_n \\ A \equiv A_n}}{\Rightarrow} \boxed{X_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)} \qquad (eigenfunctions)$$

نکته : در این مثال خاص که بیانگر انتقال حرارت طولی در یک میله است، ω_n ها مفهوم فرکانس طبیعی و X_n ها مفهوم شکل مودها را ندارند.

مرحله ۳) حال به تعیین $T(t)$ می پردازیم. از آنجا که بینهایت مقدار برای ω بدست آمده، پس بینهایت $T(t)$ نیز خواهیم داشت.

$$\overset{T\equiv T_n}{\Rightarrow} T_n' + \omega_n^2 T_n = 0 \to \frac{dT_n}{T_n} = -\omega_n^2\, dt \overset{\int}{\Rightarrow} \ln T_n = -\omega_n^2 t + \bar{C}_n$$

$$\Rightarrow T_n = e^{-\omega_n^2 t + \bar{C}_n} = e^{\bar{C}_n} e^{-\omega_n^2 t} = C_n e^{-\omega_n^2 t}$$

$$\Rightarrow \theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n C_n e^{-\omega_n^2 t} \sin(\frac{n\pi x}{l})$$

$$A_n C_n = c_n \Rightarrow \boxed{\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\omega_n^2 t} \sin(\frac{n\pi x}{l})}$$

مرحله ۴) حال باید ضرایب مجهول را از شرط اولیه بدست آورد:

$$\theta(x,0) = S(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{n\pi x}{l}) = S(x)$$

روش جداسازی متغیرها (Separation of Variables)– مثال انتقال حرارت

حال کافی است بسط فوریه سینوسی $S(x)$ را بنویسیم:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(\frac{n\pi x}{l}) \quad , \quad s_n=\frac{2}{l}\int_0^l S(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{n\pi x}{l})=S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(\frac{n\pi x}{l})$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(c_n-s_n)\sin(\frac{n\pi x}{l})=0 \Rightarrow \boxed{c_n=s_n=\frac{2}{l}\int_0^l S(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx}$$

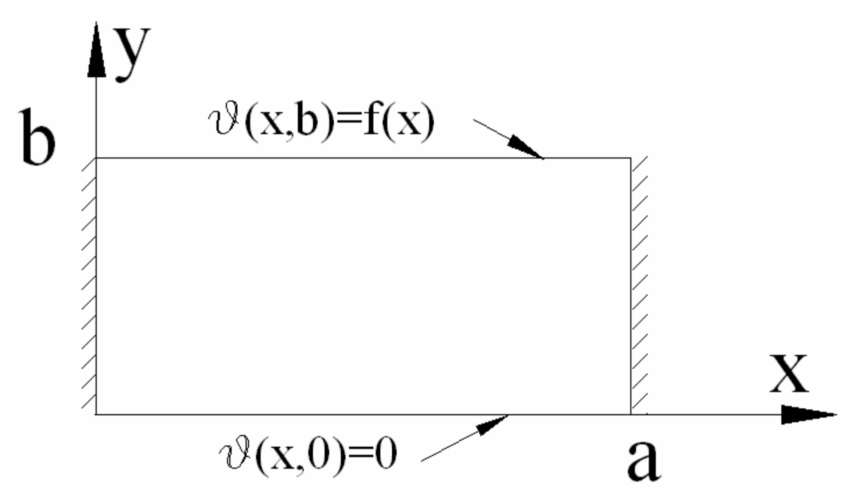
$$\boxed{\theta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l S(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx\right)e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2 t}\sin(\frac{n\pi x}{l})}$$

مثال) فرض کنید مستطیلی به ابعاد a و b در وضعیت پایدار از لحاظ انتقال حرارت قرار دارد. دو دیواره x=0 و x=a عایق شده اند. دیواره y=0 دارای دمای صفر و دیواره y=b دارای توزیع دمای f(x) است. توزیع دما را در این مستطیل بدست آورید. حل: معادله دیفرانسیل پاره ای (PDE)، شرایط اولیه و شرایط مرزی مساله بصورت زیر می باشند (معادله لاپلاس بدست می آید):

$$steady \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$$

$$\nabla^2 \theta = \theta_{xx} + \theta_{yy} = 0$$

$$BCs \begin{cases} @\, x = 0 : \ \theta_x(0, y) = 0 \\ @\, x = a : \ \theta_x(a, y) = 0 \\ @\, y = 0 : \ \theta(x, 0) = 0 \\ @\, y = b : \ \theta(x, b) = f(x) \end{cases}$$



روش جداسازی متغیرها (Separation of Variables)– مثال انتقال حرارت

مرحله ۱) می نویسیم:

$$\theta(x,y)=X(x)Y(y)$$

مرحله ۲) تعیین مساله مقدار ویژه: با قراردادن $\theta=XY$ در معادله اصلی و تقسیم کردن طرفین بر XY خواهیم داشت:

$$X''Y+XY''=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

نکته مهم: از آنجا که سمت راست فقط تابع x و سمت چپ فقط تابع y است، پس باید طرفین تساوی مقادیر ثابتی باشند:

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\lambda \Rightarrow \begin{cases} X''(x)-\lambda X(x)=0 \\ Y''(y)+\lambda Y(y)=0 \end{cases}$$

حال به بررسی شرایط مرزی می پردازیم:

$$BCs\begin{cases} @x=0:\ \theta_x(0,y)=0 \Rightarrow X'(0)Y(y)=0 \Rightarrow X'(0)=0 \\ @x=a:\ \theta_x(a,y)=0 \Rightarrow X'(a)Y(y)=0 \Rightarrow X'(a)=0 \\ @y=0:\ \theta(x,0)=0 \Rightarrow X(x)Y(0)=0 \\ @y=b:\ \theta(x,b)=f(x) \Rightarrow X(x)Y(b)=f(x) \end{cases}$$

توجه داریم که هردو شرط مرزی برای X(x) همگن هستند و لذا X(x) را می توان در ابتدا تعیین نمود. مساله مقدار ویژه (Sturm-Liouville) بصورت زیر است:

$$\boxed{X''(x)-\lambda X(x)=0\ ,\quad X'(0)=0\ ,\quad X'(a)=0}$$

در واقع λ مجهول اصلی است که باید تعیین شود و برای آن سه حالت بوجود می آید. باید مساله مقدار ویژه را برای هر سه حالت حل نمود.

$$\lambda>0\ ,\qquad \lambda=0\ ,\qquad \lambda<0$$

روش جداسازی متغیرها (Separation of Variables)– مثال انتقال حرارت

حالت اول: $\lambda=\alpha^2>0$ را درنظر بگیرید. در اینصورت برای $X(x)$ خواهیم داشت:

$$X''-\alpha^2X=0\rightarrow X(x)=Ae^{\alpha x}+Be^{-\alpha x}$$

با اعمال شرایط مرزی، به پاسخ صفر برای $\theta(x,y)$ می رسیم که قابل قبول نیست:

$$\begin{cases}X'(0)=0\rightarrow A-B=0\\ X'(a)=0\rightarrow \alpha(Ae^{\alpha a}-Be^{-\alpha a})=0\end{cases}$$

$$\rightarrow A=B=0\ \rightarrow\ X(x)=0\ \rightarrow \theta(x,y)=XY=0$$

حالت دوم: $\lambda=0$ را درنظر بگیرید. در اینصورت حل $X(x)$ بصورت زیر خواهد شد که قابل قبول است:

$$\lambda=0\xrightarrow{X\equiv X_0} X_0''(x)=0\ \rightarrow\ X_0(x)=Ax+B$$

$$\begin{cases}X_0'(0)=0\rightarrow A=0\\ X_0'(a)=0\rightarrow A=0\end{cases}\rightarrow \boxed{X_0(x)=B}$$

روش جداسازی متغیرها (Separation of Variables)– مثال انتقال حرارت

حال مسأله $Y(y)$ را بازای $\lambda = 0$ درنظر بگیرید. داریم:

$$\lambda = 0 \xrightarrow{Y \equiv Y_0} Y_0''(y) = 0 \rightarrow \boxed{Y_0(y) = Cy + D}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_0(x,y) = X_0(x)Y_0(y) = B(Cy + D)}$$

حالت سوم: $\lambda = -\omega^2 < 0$ را درنظر بگیرید. در اینصورت برای $X(x)$ خواهیم داشت:

$$X'' + \omega^2 X = 0 \rightarrow X(x) = E\cos(\omega x) + F\sin(\omega x)$$

$$\begin{cases} X'(0) = 0 \rightarrow F = 0 \\ X'(a) = 0 \rightarrow -\omega E\sin(\omega a) = 0 \rightarrow \begin{cases} if \;\; E = 0 \rightarrow X(x) = 0 \\ if \;\; \sin(\omega a) = 0 \rightarrow \omega a = n\pi \end{cases} \end{cases}$$

$$\overset{\omega \equiv \omega_n}{\Rightarrow} \boxed{\omega_n = \frac{n\pi}{a}}, \qquad n = 1, 2, \ldots \;\; (eigenvalues)$$

$$\overset{\substack{X \equiv X_n \\ A \equiv A_n}}{\Rightarrow} \boxed{X_n(x) = E_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)} \qquad (eigenfunctions)$$

مرحله ۳) حال به تعیین $Y(y)$ می پردازیم. از آنجا که بینهایت مقدار برای ω بدست آمده، پس بینهایت $Y(y)$ نیز خواهیم داشت.

$$\overset{Y\equiv Y_n}{\Rightarrow} Y_n'' - \omega_n^2 Y_n = 0 \to Y_n(y) = G_n\cosh(\omega_n y) + H_n\sinh(\omega_n y)$$

$$\Rightarrow \theta(x,y) = X_0(x)Y_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y)$$

$$= B(Cy + D) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n\left[G_n\cosh(\omega_n y) + H_n\sinh(\omega_n y)\right]\cos(\frac{n\pi x}{a})$$

$$BC = r_0,\ BD = s_0,\quad E_nG_n \equiv k_n,\quad E_nH_n \equiv h_n$$

$$\boxed{\theta(x,y) = r_0 y + s_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[k_n\cosh(\omega_n y) + h_n\sinh(\omega_n y)\right]\cos(\frac{n\pi x}{a})}$$

مرحله ۴) ضرایب مجهول را از دو شرط مرزی که هنوز استفاده نکرده ایم بدست می آوریم.

$$\begin{cases} @y=0:\ \theta(x,0)=0 \Rightarrow \quad s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n\cos(\frac{n\pi x}{a}) = 0 \Rightarrow \boxed{s_0 = k_n = 0} \\ @y=b:\ \theta(x,b)=f(x) \Rightarrow r_0 b + \sum_{n=1}^{\infty} h_n\sinh(\omega_n b)\cos(\frac{n\pi x}{a}) = f(x) \end{cases}$$

حال کافی است بسط فوریه کسینوسی $f(x)$ را بنویسیم:

$$f(x)=\frac{f_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} f_n\cos(\frac{n\pi x}{a})$$

$$f_0=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\,dx\quad,\qquad f_n=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos(\frac{n\pi x}{a})dx$$

در نتیجه داریم:

$$r_0 b+\sum_{n=1}^{\infty} h_n\sinh(\frac{n\pi b}{a})\cos(\frac{n\pi x}{a})=f(x)=\frac{f_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} f_n\cos(\frac{n\pi x}{a})$$

$$\Rightarrow\left(r_0 b-\frac{f_0}{2}\right)+\left(\sum_{n=1}^{\infty}(h_n-f_n)\sinh(\frac{n\pi b}{a})\cos(\frac{n\pi x}{a})\right)=0$$

$$\Rightarrow r_0 b=\frac{f_0}{2}\quad\Rightarrow\boxed{r_0=\frac{1}{ab}\int_0^a f(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow h_n\sinh(\frac{n\pi b}{a})=f_n\Rightarrow\boxed{h_n=\frac{2}{a\sinh(\frac{n\pi b}{a})}\int_0^a f(x)\cos(\frac{n\pi x}{a})\,dx}$$

$$\boxed{\theta(x,y)=r_0 y+\sum_{n=1}^{\infty} h_n\sinh(\frac{n\pi y}{a})\cos(\frac{n\pi x}{a})}$$

روش جداسازی متغیرها– مسائل غیرهمگن

به عنوان مثال، معادله موج را درنظر می گیریم. کتا ب دو حالت را در نظر گرفته است. یک حالت این است که تابع f فقط تابعی از x باشد و حالت دوم این است که تابع f، تابعی از (x و t) و یا فقط t باشد.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \{f(x) \;\; or \;\; f(x,t) \;\; or \;\; f(t)\} \qquad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$BCs \begin{cases} @x = 0: \; u(0,t) = p(t) \\ @x = l: \; u(l,t) = q(t) \end{cases}$$

$$ICs \begin{cases} @t = 0: \; u(x,0) = h(x) \\ @t = 0: \; u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

در اینجا، ما از تقسیم بندی کتاب پیروی نمی کنیم. در واقع ما حالت دوم کتاب را درنظر می گیریم که حالت اول را نیز تحت پوشش قرار می دهد. تابع f را نیز به شکل کلی $f(x,t)$ میگیریم.

برخی از مسائل اگر با روش اول کتاب حل شوند، منجر به پاسخ هایی می شوند که از لحاظ فیزیکی قابل قبول نیستند!

روش جداسازی متغیرها – مسائل غیر همگن

فرض کنید به عنوان مثال، تابع $u(x,t)$ مجهول معادله دیفرانسیل پاره ای باشد، در اینصورت مراحل روش جداسازی چنین است:

مرحله ۱) ابتدا پاسخ را بصورت $u(x,t)=V(x,t)+F(x,t)$ درنظر می گیریم. هدف تابع $F(x,t)$، همگن کردن شرایط مرزی و در واقع حذف $p(t)$ و $q(t)$ می باشد. کافی است قرار دهیم $F(x,t)=a(t)x+b(t)$ و ضرایب تابعی $a(t)$ و $b(t)$ را برحسب $p(t)$ و $q(t)$ بدست آوریم.

$$F(x,t)=a(t)x+b(t)$$

$$\begin{cases} @\,x=0:\ u(0,t)=F(0,t)=p(t)\Rightarrow a(t)\times 0+b(t)=p(t)\Rightarrow \boxed{b(t)=p(t)} \\ @\,x=l:\ u(l,t)=F(l,t)=q(t)\Rightarrow a(t)\times l+b(t)=a(t) \\ \Rightarrow la(t)+p(t)=q(t)\Rightarrow \boxed{a(t)=\dfrac{q(t)-p(t)}{l}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x,t)=[\frac{q(t)-p(t)}{l}]x+p(t)}$$

مرحله ۲) با قرار دادن $F(x,t)$ بدست آمده در مرحله قبل، مسأله مربوط به $V(x,t)$ را تشکیل می دهیم. توجه داریم که شرایط اولیه تغییر خواهند نمود.

روش جداسازی متغیرها – مسائل غیر همگن

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=f(x,t)\xrightarrow[F=ax+b]{u=V+F}\boxed{V_{tt}-c^2V_{xx}=f(x,t)-F_{tt}=K(x,t)}\quad PDE$$

$$BC1:\ u(0,t)=p(t)\Rightarrow V(0,t)+F(0,t)=p(t)\xrightarrow{F(0,t)=p(t)}\boxed{V(0,t)=0}$$

$$BC2:\ u(l,t)=q(t)\Rightarrow V(l,t)+F(l,t)=q(t)\xrightarrow{F(l,t)=q(t)}\boxed{V(l,t)=0}$$

$$IC1:\ u(x,0)=h(x)\Rightarrow V(x,0)+F(x,0)=h(x)\Rightarrow\boxed{V(x,0)=h(x)-F(x,0)}$$

$$IC2:\ u_t(x,0)=g(x)\Rightarrow V_t(x,0)+F_t(x,0)=g(x)\Rightarrow\boxed{V_t(x,0)=h(x)-F_t(x,0)}$$

در نهایت، مسأله مربوط به $V(x,t)$ بصورت زیر است:

$$\begin{array}{c}V(x,t)\\ problem\end{array}\begin{cases}PDE: \quad V_{tt}-c^2V_{xx}=K(x,t)\\ BCs\begin{cases}@x=0\to V(0,t)=0\\ @x=l\to V(l,t)=0\end{cases}\\ ICs\begin{cases}@t=0\to V(x,0)=h(x)-F(x,0)\\ @t=0\to V_t(x,0)=g(x)-F_t(x,0)\end{cases}\end{cases}$$

روش جداسازی متغیرها – مسائل غیر همگن

مرحله ۳) قبل از حل مسأله $V(x,t)$، ابتدا مسأله $W(x,t)$ را که فرم همگن شده $V(x,t)$ است را با استفاده از روش جداسازی عادی حل می کنیم. هدف ما در این مرحله، بدست آوردن مقادیر ویژه و توابع ویژه است.

$$\begin{matrix} W(x,t) \\ problem \end{matrix}\left\{\begin{matrix} PDE: & W_{tt}-c^2W_{xx}=0 \\ BCs & \left\{\begin{matrix} @x=0\rightarrow W(0,t)=0 \\ @x=l\rightarrow W(l,t)=0 \end{matrix}\right. \end{matrix}\right\}\Rightarrow gives\ \boxed{X_n(x),\ \omega_n}$$

مرحله ۴) قرار می دهیم

$$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)V_n(t)$$

مرحله ۵) رابطه فوق را در داخل معادله مربوط به $V(x,t)$ قرار می دهیم. سپس بسط فوریه تابع $K(x,t)$ را برحسب توابع ویژه $X_n(x)$ را می نویسیم. در نهایت معادله ای برای $V_n(t)$ بدست می آید.

مرحله ۶) معادله ی $V_n(t)$ را حل می کنیم که منجر به پیدایش یک سری ضرایب مجهول می شود.

مرحله ۷) ضرایب مجهول مرحله قبل را براساس شرایط اولیه مسأله $V(x,t)$ بدست می آوریم.

مثال) معادله موج غیر همگن زیر را حل کنید

$$u_{tt} - u_{xx} = x\sin(t)\ ,\quad c = 1\ ,\quad 0 \le x \le 1\quad (l = 1)\ ,\ t \ge 0$$

$$BCs\begin{cases} @x = 0:\ u(0,t) = 0 = p(t) \\ @x = 1:\ u(1,t) = \sin(t) = q(t) \end{cases}$$

$$ICs\begin{cases} @t = 0:\ u(x,0) = x \\ @t = 0:\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

مرحله ۱) ابتدا پاسخ را بصورت $u(x,t)=V(x,t)+F(x,t)$ درنظر می گیریم. هدف تابع $F(x,t)$، همگن کردن شرایط مرزی و در واقع حذف $p(t)$ و $q(t)$ می باشد. کافی است قرار دهیم $F(x,t)=a(t)x+b(t)$ و ضرایب تابعی $a(t)$ و $b(t)$ را برحسب $p(t)$ و $q(t)$ بدست آوریم.

$$F(x,t) = a(t)x + b(t)$$

$$\begin{cases} @x = 0:\ u(0,t) = F(0,t) = 0 \Rightarrow a(t)\times 0 + b(t) = 0 \Rightarrow \boxed{b(t) = 0} \\ @x = 1:\ u(1,t) = F(1,t) = \sin(t) \Rightarrow a(t)\times 1 + b(t) = \sin(t) \\ \Rightarrow a(t) + 0 = \sin(t) \Rightarrow \boxed{a(t) = \sin(t)} \Rightarrow \boxed{F(x,t) = x\sin(t)} \end{cases}$$

روش جداسازی متغیرها – مسائل غیر همگن- مثال

مرحله ۲) با قرار دادن *F(x,t)* بدست آمده در مرحله قبل، مسأله مربوط به *V(x,t)* را تشکیل می دهیم. توجه داریم که شرایط اولیه تغییر خواهند نمود.

$$u_{tt}-u_{xx}=x\sin(t)\xrightarrow[F=x\sin(t)]{u=V+F}\boxed{V_{tt}-V_{xx}=2x\sin(t)=K(x,t)}\quad PDE$$

$$BC1:\ u(0,t)=0\Rightarrow V(0,t)+F(0,t)=0\xrightarrow{F(0,t)=0}\boxed{V(0,t)=0}$$

$$BC2:\ u(1,t)=\sin(t)\Rightarrow V(1,t)+F(1,t)=\sin(t)\xrightarrow{F(1,t)=\sin(t)}\boxed{V(1,t)=0}$$

$$IC1:\ u(x,0)=x\Rightarrow V(x,0)+F(x,0)=x\Rightarrow\boxed{V(x,0)=x}$$

$$IC2:\ u_t(x,0)=0\Rightarrow V_t(x,0)+F_t(x,0)=0\Rightarrow\boxed{V_t(x,0)=-x}$$

در نهایت، مسأله مربوط به *V(x,t)* بصورت زیر است:

$$\begin{array}{c}V(x,t)\\ problem\end{array}\begin{cases}PDE: & V_{tt}-V_{xx}=2x\sin(t)=K(x,t)\\ BCs & \begin{cases}@x=0\rightarrow V(0,t)=0\\ @x=1\rightarrow V(1,t)=0\end{cases}\\ ICs & \begin{cases}@t=0\rightarrow V(x,0)=x\\ @t=0\rightarrow V_t(x,0)=-x\end{cases}\end{cases}$$

روش جداسازی متغیرها – مسائل غیر همگن- مثال

مرحله ۳) قبل از حل مسأله $V(x,t)$، ابتدا مسأله $W(x,t)$ را که فرم همگن شده $V(x,t)$ است را با استفاده از روش جداسازی عادی حل می کنیم. هدف ما در این مرحله، بدست آوردن مقادیر ویژه و توابع ویژه است.

$$\begin{array}{c} W(x,t) \\ problem \end{array}\left\{\begin{array}{ll} PDE: & W_{tt}-W_{xx}=0 \\ BCs & \left\{\begin{array}{l} @\,x=0 \rightarrow W(0,t)=0 \\ @\,x=1 \rightarrow W(1,t)=0 \end{array}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow find\ \boxed{X_n(x),\ \omega_n}$$

جهت حل مسأله فوق، قرار می دهیم $W(x,t)=X(x)T(t)$. با جایگزینی در معادله خواهیم داشت:

$$T''X=X''T \quad \Rightarrow \quad \frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda \Rightarrow \begin{cases} T''(t)-\lambda T(t)=0 \\ X''(x)-\lambda X(x)=0 \end{cases}$$

$$W(0,t)=X(0)T(t)=0 \quad \Rightarrow \quad X(0)=0$$

$$W(1,t)=X(1)T(t)=0 \quad \Rightarrow \quad X(1)=0$$

در نهایت مساله مقدار ویژه (Sturm-Liouville) بصورت زیر خواهد بود:

$$X''(x)-\lambda X(x)=0\ , \quad X(0)=0\ , \quad X(1)=0$$

در واقع λ مجهول اصلی است که باید تعیین شود و برای آن سه حالت بوجود می آید. باید مساله مقدار ویژه را برای هر سه حالت حل نمود.

$$\lambda>0\ ,\qquad \lambda=0\,,\qquad \lambda<0$$

حالت های اول و دوم: $\lambda=\alpha^2>0$ و $\lambda=0$: در این دو حالت، به سادگی می توان نشان داد که تنها جواب صفر برای $X(x)$ و در نتیجه $W(x,t)$ بدست می آید که قابل قبول نیست.

حالت سوم: $\lambda=-\omega^2<0$ را درنظر بگیرید. در اینصورت برای $X(x)$ خواهیم داشت:

$$X''+\omega^2X=0\rightarrow X(x)=A\sin(\omega x)+B\cos(\omega x)$$

$$\begin{cases} X(0)=0\rightarrow B=0 \\ X(1)=0\rightarrow A\sin(\omega)=0\rightarrow \begin{cases} if\ \ A=0\rightarrow X(x)=0\rightarrow u(x,t)=0 \\ if\ \ \sin(\omega)=0\rightarrow \omega=n\pi \end{cases} \end{cases}$$

$$\overset{\omega\equiv\omega_n}{\Rightarrow}\ \boxed{\omega_n=n\pi}\ ,\qquad n=1,2,\ldots\ (eigenvalues)$$

$$\overset{\substack{X\equiv X_n \\ A\equiv A_n}}{\Rightarrow}\ \boxed{X_n(x)=A_n\sin(n\pi x)}\qquad (eigenfunctions)$$

مرحله ۴) قرار می دهیم

$$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)V_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi x)V_n(t)$$

مرحله ۵) رابطه فوق را در داخل معادله مربوط به $V(x,t)$ قرار می دهیم. سپس بسط فوریه تابع $K(x,t)$ را برحسب توابع ویژه $X_n(x)$ را می نویسیم. در نهایت معادله ای برای $V_n(t)$ بدست می آید.

$$\sum_{n=1}^{\infty}[V_n''(t)+\omega_n^2V_n(t)]\sin(n\pi x)=2x\sin(t)=K(x,t)$$

$$K(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}k_n\sin(n\pi x)\ ,\ k_n=\frac{2}{l}\int_0^l K(x,t)\sin(n\pi x)dx$$

$$k_n=2\int_0^1 2x\sin(t)\sin(n\pi x)dx=4\sin(t)\int_0^1 x\sin(n\pi x)dx$$

$$\Rightarrow \boxed{k_n=\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(t)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}[V_n''(t)+\omega_n^2V_n(t)]\sin(n\pi x)=K(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}k_n\sin(n\pi x)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}[V_n''(t)+\omega_n^2V_n(t)-k_n]\sin(n\pi x)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{V_n''(t)+\omega_n^2V_n(t)=k_n=\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(t)}$$

روش جداسازی متغیرها – مسائل غیر همگن- مثال

مرحله ۶) معادله ی $V_n(t)$ را حل می کنیم که منجر به پیدایش یک سری ضرایب مجهول می شود. پاسخ برای یک قسمت همگن و یک قسمت غیر همگن است.

$$V_n''(t)+\omega_n^2 V_n(t)=\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(t)$$

$$\Rightarrow V_n(t)=\underbrace{C_{1n}\cos(\omega_n t)+C_{2n}\sin(\omega_n t)}_{\text{homogeneuous}}+\underbrace{\Phi_n(t)}_{\text{particular}}$$

جهت بدست آوردن پاسخ خصوصی مسأله، بصورت زیر عمل می کنیم:

$$\Phi_n(t)=M_n\sin(t)\Rightarrow M_n[-1+\omega_n^2]\sin(t)=\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{M_n=\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi(\omega_n^2-1)}}\Rightarrow \Phi_n(t)=\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi(\omega_n^2-1)}\sin(t)$$

$$\Rightarrow V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)V_n(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned}V(x,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{1n}\cos(n\pi t)+C_{2n}\sin(n\pi t)+\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi[(n\pi)^2-1)}\sin(t)\right]\sin(n\pi x)\\ V_t(x,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-n\pi C_{1n}\sin(n\pi t)+n\pi C_{2n}\cos(n\pi t)+\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi[(n\pi)^2-1)}\cos(t)\right]\sin(n\pi x)\end{aligned}}$$

مرحله ۷) ضرایب مجهول مرحله قبل را براساس شرایط اولیه مسأله $V(x,t)$ بدست می آوریم.

$$V(x,0)=x \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n}\sin(n\pi x)=x$$

$$V_t(x,0)=-x \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left[n\pi C_{2n}+\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi[(n\pi)^2-1)}\right]\sin(n\pi x)=-x$$

حال کافی است که بسط سینوسی تابع طرف دوم را بنویسیم.

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(n\pi x) \Rightarrow b_n=\frac{2}{1}\int_0^1 x\sin(n\pi x)dx=\frac{2(-1)^n}{n\pi}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n}\sin(n\pi x)=x=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(n\pi x)$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{1n}=b_n=\frac{2(-1)^n}{n\pi}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[n\pi C_{2n}+\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi[(n\pi)^2-1)}\right]\sin(n\pi x)=-x=-\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(n\pi x)$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{2n}=\frac{2(-1)^n}{(n\pi)^2}\left[1+\frac{2}{(n\pi)^2-1}\right]}$$

در نهایت پاسخ مسأله بصورت زیر خواهد بود:

$$u(x,t) = F(x,t) + V(x,t)$$

$$= x\sin(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2(-1)^n}{n\pi}\cos(n\pi t) + \frac{2(-1)^n}{(n\pi)^2}\left[1+\frac{2}{(n\pi)^2-1}\right]\sin(n\pi t) + \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi[(n\pi)^2-1)}\sin(t)\right\}\sin(n\pi x)$$

توجه: می توان F(x,t) را نیز برحسب $sin(n\pi x)$ بسط فوریه ی سینوسی داد و پاسخ را تنها بصورت یک سری سینوسی نوشت (البته نیازی به این کار نیست).

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) \Rightarrow b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x\sin(n\pi x)dx = \frac{2(-1)^n}{n\pi}$$

$$\rightarrow F(x,t) = x\sin(t) = \sin(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n\pi}\sin(n\pi x)$$

$$u(x,t) = F + V = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2(-1)^n}{n\pi}\cos(n\pi t) + \frac{2(-1)^n}{(n\pi)^2}\left[1+\frac{2}{(n\pi)^2-1}\right]\sin(n\pi t) + \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi[(n\pi)^2-1)}\sin(t) + \frac{2(-1)^n}{n\pi}\sin(t)\right\}\sin(n\pi x)$$

QUESTION : CAN WE ALWAYS USE THE METHODS OF SEPARATION OF VARIABLES TO SOLVE A PDE DEFINED ON A FINITE REGION?

ANSWER: **NO**.

Notice that

1) The PDE must be linear

2) If the coefficients of the linear PDE are constant real numbers, then the method is always applicable. Although, it may be too hard to solve the resulting Sturm-Liouville problem!

3) It is possible to have non-constant coefficients, however the cofficnets of mixed deriravetives must be costant. Moreover, if u(x,y) is unknown, then the coefficient of u(x,y) must be of the form $F(x)+G(y)$.

EXAMPLE: The following PDE can be solved by separation of variables:

$$A(x)u_{xx}+B_1(x)B_2(y)u_{xy}+C(y)u_{yy}+D(x)u_x+E(y)u_y+[F(x)+G(y)]u=0$$

Notice that $B=B_1(x)B_2(y)$ is a separable function.

ریاضیات مهندسی
ویژه دوره کارشناسی مهندسی مکانیک

فصل سوم
مسأله Sturm-Liouville و سری فوریه تعمیم یافته

مدرس: فرزام دادگر راد
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان

سری فوریه تعمیم یافته

در فصل قبل، به روش جداسازی متغیرها پرداختیم. اگر بخاطر بیاورید، در مرحله دوم، یک مسأله مقدار ویژه (معمولاً مسأله مربوط به $X(x)$) را حل میکردیم که در نهایت منجر به تعیین مقادیر ویژه (ω_nها) و توابع ویژه (X_nها) می شد. در این قسمت، میخواهیم کمی بیشتر در خصوص مسأله $X(x)$ صحبت کنیم.

در صورت استفاده از روش جداسازی و اعمال شرایط مرزی، شکل کلی مسأله $X(x)$ در معادلات دیفرانسیل مرتبه ۲ نسبت به متغیر x بصورت زیر است:

Sturm-Liouville Problem

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1(x)X''(x)+a_2(x)X'(x)+[a_3(x)\pm\lambda]X(x)=0 \qquad (*) \\ BCs\begin{cases} @x=a: & \alpha_1X(a)+\alpha_2X'(a)=0 \\ @x=b: & \beta_1X(b)+\beta_2X'(b)=0 \end{cases} \end{array}}$$

که در آن λ همان است که در فصل قبل دیدید. یعنی همیشه در مسأله $X(x)$ یک λ در درون معادله وجود دارد که برای آن سه حالت مثبت، منفی و صفر را باید درنظر بگیریم. همانگونه که قبلاً دیدیم و در بالا نیز ذکر شد، هدف ما تعیین λ (یا در نهایت ω_nها) و نیز توابع X_nها می باشد. مسأله فوق را، مسأله *Sturm-Liouville* گویند.

حال ابتدا معادله (*) را بر $a_1(x)$ تقسیم کنید. سپس دو طرف آنرا در $p(x)$ که در زیر تعریف شده ضرب کنید. سایر توابع مورد نیاز نیز در زیر آورده شده اند:

$$p(x)=\exp\int\frac{a_2(x)}{a_1(x)}dx \quad , \quad q(x)=\frac{a_3(x)}{a_1(x)}p(x) \quad , \quad s(x)=\pm\frac{p(x)}{a_1(x)}$$

سری فوریه تعمیم یافته-مثال

در نهایت، شکل زیر برای معادله (*) بدست می آید که آنرا فرم کانونیک مسأله X(x) می نامیم:

$$\text{Canonical Form:}\ \boxed{\frac{d}{dx}[p(x)X'(x)]+[q(x)+\lambda s(x)]X(x)=0 \qquad (**)}$$

توجه: فرم کانونیک (یا فرم استاندارد) در اثبات قضیه ی لیوویل مبنی بر تعامد توابع پایه با وزن s کاربرد دارد که در کلاس درس ارائه خواهد شد.

مثال: فرض کنید در حل یک PDE، به مسأله X(x) بصورت زیر رسیده باشیم. ابتدا فرم کانونیک را بدست اورید، سپس مقادیر ویژه و توابع ویژه را بدست آورید.

$$\begin{cases} x^2X''(x)+xX'(x)+\lambda X(x)=0 \ , \quad x\in[1,e] \\ BCs: \quad X(1)=0 \ , \quad X(e)=0 \end{cases}$$

حل:

$$a_1=x^2,\ a_2=x,\ a_3=0$$

$$p(x)=\exp\int\frac{a_2(x)}{a_1(x)}dx=\exp\int\frac{x}{x^2}dx=\exp\int\frac{1}{x}dx=e^{\ln(x)}=x$$

$$q(x)=\frac{a_3(x)}{a_1(x)}p(x)=0 \ , \quad s(x)=\frac{p(x)}{a_1(x)}=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}$$

$$\xrightarrow[\text{Form}]{\text{Canonical}}\ \boxed{\frac{d}{dx}[xX'(x)]+\lambda\frac{1}{x}X(x)=0}$$

سری فوریه تعمیم یافته-مثال

اما اگر معادله دیفرانسیل X(x) را درنظر بگیریم، یک معادله اویلر است که حل آن بصورت زیر است:

$$X(x)=x^r \Rightarrow [r(r-1)+r+\lambda]x^r=0 \xrightarrow[\text{Equation}]{\text{Characteristic}} \boxed{r^2+\lambda=0}$$

حال باید سه حالت را برای λ درنظر بگیریم.

حالت اول: $\lambda=-\alpha^2<0$ را درنظر بگیرید. در اینصورت برای معادله مشخصه و $X(x)$ خواهیم داشت:

$$r^2-\alpha^2=0 \Rightarrow r=\pm\alpha \Rightarrow X(x)=C_1x^{\alpha}+C_2x^{-\alpha}$$

$$BCs\begin{cases} X(1)=0 \Rightarrow C_1+C_2=0 \\ X(e)=0 \Rightarrow C_1e^{\alpha}+C_2e^{-\alpha}=0 \end{cases} \rightarrow C_1=C_2=0 \rightarrow X(x)=0$$

حالت دوم: $\lambda=0$ را درنظر بگیرید. در اینصورت:

$$r^2=0 \Rightarrow r=0,0 \Rightarrow X(x)=C_1+C_2\ln x$$

$$BCs\begin{cases} X(1)=0 \Rightarrow C_1=0 \\ X(e)=0 \Rightarrow C_2=0 \end{cases} \rightarrow X(x)=0$$

حالت سوم: $\lambda=\omega^2>0$ را درنظر بگیرید. بنابراین:

$$r^2+\omega^2=0 \Rightarrow r=\pm i\omega \Rightarrow X(x)=C_1\cos(\omega\ln x)+C_2\sin(\omega\ln x)$$

$$BCs\begin{cases} X(1)=0 \Rightarrow C_1=0 \\ X(e)=0 \Rightarrow C_2\sin(\omega)=0 \Rightarrow \begin{cases} C_2=0 \rightarrow X(x)=0 \\ \sin(\omega)=0 \rightarrow \boxed{\omega_n=n\pi}\,,\quad n=1,2,..,\infty \\ \rightarrow \boxed{X_n(x)=C_{2n}\sin(n\pi\ln x)} \end{cases} \end{cases}$$

سری فوریه تعمیم یافته

بنابراین در این مثال، مقادیر ویژه و توابع ویژه بصورت زیر بدست آمدند. حال میتوان از اینها بر ای ادامه حل PDE استفاده نمود. توجه کنید که Xnهای بدست آمده بصورت $sin(n\pi x/l)$ نیستند!

$$\boxed{\omega_n = n\pi \quad \text{or} \quad \lambda_n = \omega_n^2 = (n\pi)^2}\,, \quad n = 1,2,\ldots,\infty \quad (Eigenvalue)$$

$$\boxed{X_n(x) = C_{2n}\sin(n\pi \ln x)} \qquad (Eigenfunction)$$

در این مرحله، از فصل اول بخاطر می آوریم که ضرب داخلی دو تابع f و g با وزن s(x) بصورت زیر است:

$$<f,g>_s = \int_0^l s(x)f(x)g(x)dx$$

سری فوریه تعمیم یافته: فرض کنید در حل یک PDE، به مسأله $X(x)$ رسیده و آنرا حل کرده باشیم، یعنی فرض کنید X_nها و ω_nها بدست آمده باشند. تابع $s(x)$ را نیز براساس فرمولهای قبل بدست می آوریم. در اینصورت، فرض کنید در مرحله آخر روش جداسازی، یعنی در مرحله بدست آوردن ضرایب مجهول، لازم باشد که بسطی را برای یک تابع مانند $g(x)$ بنویسیم. اگر توابع X_n بصورت $sin(n\pi x/l)$ و یا $cos(n\pi x/l)$ باشند که از همان سری فوریه سینوسی و کسینوسی معروف استفاده می کنیم. اما اگر توابع X_n مثلاً بصورت $sin(n\pi\ln(x))$ که در مثال قبل دیدیم بدست آید، دیگر سری فوریه سینوسی و یا کسینوسی چاره ساز نیست. در این حالت، باید از سری فوریه تعمیم یافته براساس $sin(n\pi\ln(x))$ استفاده کنیم. در حالت کلی، سری فوریه تعمیم یافته برحسب X_nها و تابع $s(x)$ بصورت زیر است (اثبات کامل در کلاس درس ارائه می شود):

Extended Fourier Series

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n X_n(x), \qquad <X_m, X_n>_s = 0 \ (m \neq n)$$

$$k_n = \frac{<g, X_n>_s}{<X_n, X_n>_s} = \frac{\int_0^l s(x)g(x)X_n(x)dx}{\int_0^l s(x)[X_n(x)]^2 dx}$$

مثال: فرض کنید در حل یک PDE، به مسأله مقدار ویژه برای $X(x)$ بصورت زیر رسیده باشیم. ابتدا فرم کانونیک را بدست اورید، سپس مقادیر ویژه و توابع ویژه را بدست آورید. پس از آن سری فوریه تعمیم یافته تابع $g(x)=x$ را براساس توابع X_nی که بدست می آورید محاسبه کنید.

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \;,\quad x\in[0,l]$$

$$BCs:\; X(0)=0\,,\quad X'(l)=0$$

حل: توجه داریم که صورت مسأله اتوماتیک بصورت فرم کانونیک است.

$$a_1=1,\; a_2=0,\; a_3=0\rightarrow p(x)=1,\; q(x)=0\,,\; \boxed{s(x)=1}$$

$$\xrightarrow{\text{Canonical Form}} \boxed{\frac{d}{dx}[X'(x)]+\lambda X(x)=0}$$

حال باید سه حالت را برای λ درنظر بگیریم. بسادگی میتوان تحقیق کرد که بازای $\lambda<0$ و $\lambda=0$ پاسخ غیر صفر نداریم. در عوض بازای $\lambda=\omega^2>0$ داریم:

$$X''(x)+\omega^2X(x)=0 \;\rightarrow X(x)=C_1\cos(\omega x)+C_2\sin(\omega x)$$

$$X(0)=0\rightarrow C_1=0$$

$$X'(l)=0\rightarrow \omega C_2\cos(\omega l)=0\rightarrow \begin{cases} C_2=0\rightarrow X(x)=0 \\ \cos(\omega l)=0\rightarrow \omega l=(2n-1)\dfrac{\pi}{2}\,,\, n=1,2,.. \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\omega\equiv\omega_n} \boxed{\omega_n=\frac{(2n-1)\pi}{2l}}\;(Eigenvalue) \quad \xrightarrow{X\equiv X_n} \boxed{X_n=\sin[\frac{(2n-1)\pi x}{2l}]}\;(Eigenfunction)$$

حال برای سری فوریه تعمیم یافته تابع $g(x)=x$ براساس توابع X_n بدست آمده داریم:

$$g(x)=x=\sum_{n=1}^{\infty}k_n X_n(x)$$

$$k_n=\frac{\int_0^l s(x)g(x)X_n(x)dx}{\int_0^l s(x)[X_n(x)]^2dx}=\frac{\int_0^l x\sin[\frac{(2n-1)\pi x}{2l}]dx}{\int_0^l \{\sin[\frac{(2n-1)\pi x}{2l}]\}^2dx}=\frac{\int_0^l x\sin[\frac{(2n-1)\pi x}{2l}]dx}{\left(\frac{l}{2}\right)}$$

$$\rightarrow k_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\sin[\frac{(2n-1)\pi x}{2l}]dx=-\left(\frac{2}{l}\right)\left(\frac{2l}{(2n-1)\pi}\right)^2\cos(n\pi)$$

$$\rightarrow k_n=\frac{8l(-1)^n}{[(2n-1)\pi]^2}\rightarrow \boxed{g(x)=x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8l(-1)^n}{[(2n-1)\pi]^2}\sin[\frac{(2n-1)\pi x}{2l}]}$$

اگر بخاطر بیاورید، در حل مثال مربوط به ارتعاشات پیچشی میله نیز از توابع X_n فوق استفاده کرده بودیم. منتها باید توجه داشت که فرمول اصلی سری فوریه تعمیم یافته همان است که در این فصل ارائه گردید. در حالت کلی، نباید مستقیماً از فرمول سری فوریه و فقط جایگزینی X_nها بجای $\sin(n\pi x/l)$ و یا $\cos(n\pi x/l)$ استفاده نمود. به عبارت دیگر، در مثال ارتعاشات پیچشی، جواب درست به این دلیل بدست آمده بود که حاصل انتگرال مخرج در محاسبات فوق برابر $l/2$ شده است!

مثال: مسأله انتقال حرارت زیر را حل کنید. در واقع میله ای است بطول l که در زمان $t=0$ نقاط آن دارای دمای $f(x)=3x-2x^2$ هستند. دمای مکان $x=0$ همیشه برابر صفر است. در نقطه $x=1$ نیز جریان هوا برقرار است، بطوری که شرط مرزی طبیعی بصورت داده شده است.

$$\begin{cases} \theta_t-\theta_{xx}=0\ ,\quad \alpha=1,\ l=1,\ x\in[0,1],\ t\geq 0 \\ IC:\ \theta(x,0)=f(x)=3x-2x^2 \\ BCs:\ @x=0:\ \theta(0,t)=0, \qquad @x=1:\ \theta(1,t)+\theta_x(1,t)=0 \end{cases}$$

حل: روش حل را در فصل قبل آموختیم. قرار میدهیم $\theta(x,t)=X(x)T(t)$ و بنابراین بدست می آوریم.

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda \Rightarrow \begin{cases} T'(t)-\lambda T(t)=0 \\ X''(x)-\lambda X(x)=0 \end{cases}$$

$$\theta(0,t)=0\rightarrow X(0)T(t)=0\rightarrow X(0)=0$$

$$\theta(1,t)+\theta_x(1,t)=0\rightarrow X(1)T(t)+X'(1)T(t)=0\rightarrow X(1)+X'(1)=0$$

بنابراین مسأله *Sturm-Liouville* (مسأله مقدار ویژه–تابع ویژه) بصورت زیر است:

$$X''(x)-\lambda X(x)=0\ ,\quad X(0)=0\ ,\quad X(1)+X'(1)=0$$

$$\rightarrow a_1(x)=1,\ a_2(x)=0,\ a_3(x)=0$$

$$\rightarrow p(x)=1,\ q(x)=0,\ \boxed{s(x)=-1}\xrightarrow{\text{Canonical form}}\frac{d}{dx}[X'(x)]-\lambda X(x)=0$$

باید سه حالت را برای λ درنظر بگیریم. بسادگی میتوان تحقیق کرد که بازای $\lambda > 0$ و $\lambda = 0$ پاسخ غیر صفر نداریم. در عوض بازای $\lambda = -\omega^2 < 0$ داریم:

$$X''(x) + \omega^2 X(x) = 0 \;\rightarrow X(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$$

$$X(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$X(1) + X'(1) = 0 \rightarrow C_2[\sin(\omega) + \omega \cos(\omega)] = 0 \rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \rightarrow X(x) = 0 \\ \sin(\omega) + \omega \cos(\omega) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\omega \equiv \omega_n]{\div \cos(\omega)} \boxed{\tan(\omega_n) = -\omega_n}$$

حال توجه داریم که باید ω_nها را از حل معادله فوق بدست آورد. این معادله نیز بینهایت ریشه دارد. متأسفانه معادله فوق پیچیده است و حل مشخص ندارد. می توان با روش ترسیمی و یا با روش های عددی که در درس محاسبات عددی می آموزید این مسأله را حل کنید. در اینجا ریشه های تقریبی بصورت زیر هستند:

$$\omega_1 = 2.03 \;\rightarrow X_1(x) = \sin(2.03\, x)$$

$$\omega_2 = 4.91 \;\rightarrow X_2(x) = \sin(4.91\, x)$$

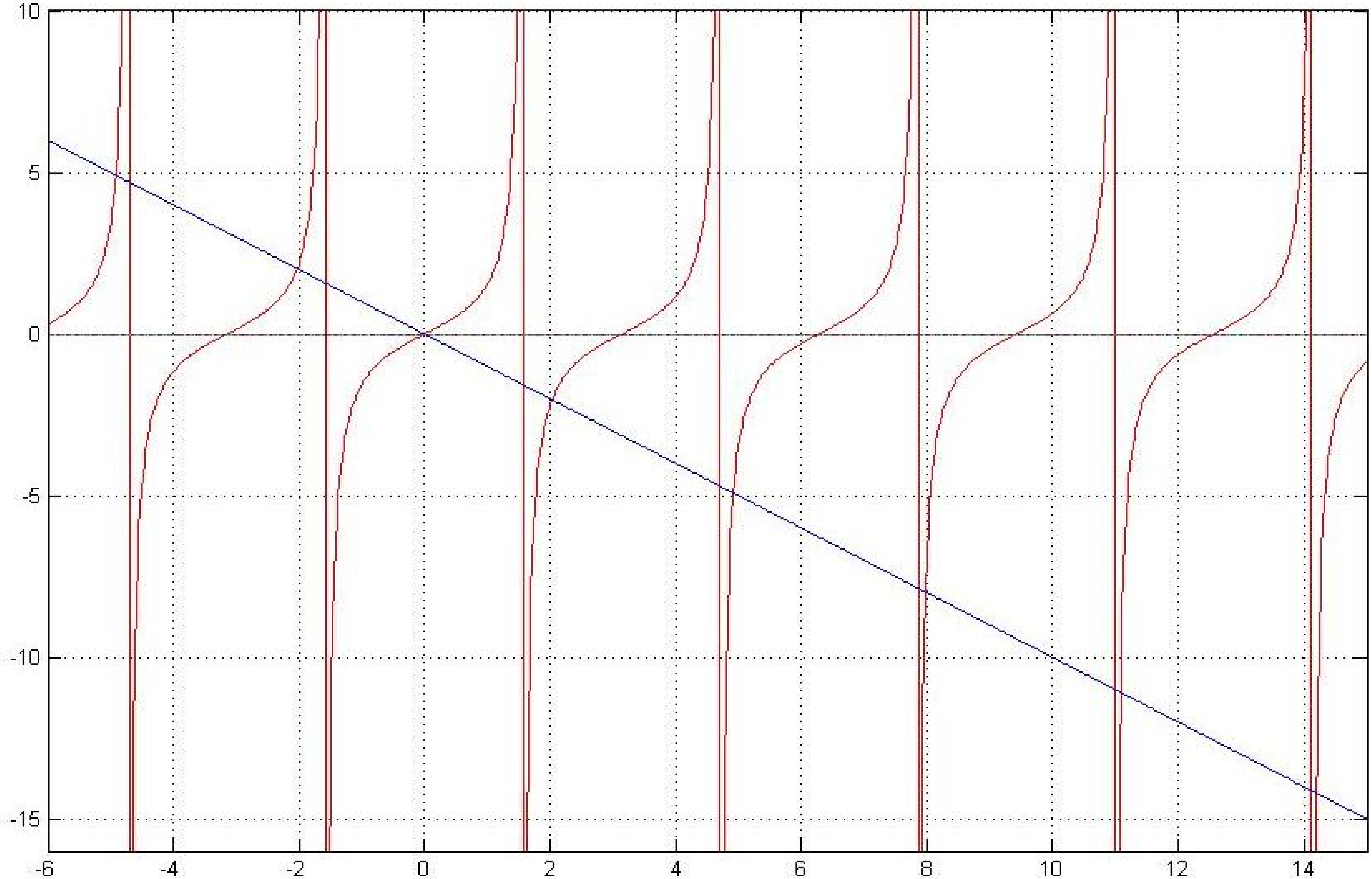
$$\omega_3 = 7.98 \;\rightarrow X_3(x) = \sin(7.98\, x), \qquad note: \; 5\pi/2 = 7.85$$

$$\omega_4 = 11.08 \;\rightarrow X_3(x) = \sin(11.08\, x), \qquad note: \; 7\pi/2 = 11$$

$$\omega_5 = 14.2 \;\rightarrow X_3(x) = \sin(14.2\, x), \qquad note: \; 9\pi/2 = 14.14$$

$$n > 5: \; \omega_n = (2n-1)\frac{\pi}{2} \;\rightarrow X_n(x) = \sin[(2n-1)\frac{\pi}{2} x]$$

نمودارهای $y=-x$ و $y=\tan(x)$ که نماینده معادله $\tan(\omega)=-\omega$ هستند.



حال مسأله *T(t)* را حل می کنیم.

$$\xrightarrow{T\equiv T_n} T_n' + \omega_n^2 T_n = 0 \rightarrow \frac{dT_n}{T_n} = -\omega_n^2\, dt \overset{\int}{\Rightarrow} \ln T_n = -\omega_n^2 t + \bar{C}_n$$

$$\Rightarrow T_n = e^{-\omega_n^2 t + \bar{C}_n} = e^{\bar{C}_n} e^{-\omega_n^2 t} = C_n e^{-\omega_n^2 t}$$

$$\Rightarrow \theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\omega_n^2 t} \sin(\omega_n x)$$

حال باید ضرایب مجهول را از شرط اولیه بدست آوریم:

$$\theta(x,0) = f(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\omega_n x) = f(x) = 3x - 2x^2$$

از آنجا که در داخل سیگما، توابع بصورت *sin(nπx/l)* نیستند، پس باید بسط فوریه تعمیم یافته *f(x)* را بنویسیم:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n X_n(x)$$

$$k_n = C_n = \frac{\int_0^1 s(x) f(x) X_n(x)\,dx}{\int_0^1 s(x)[X_n(x)]^2\,dx} = \frac{\int_0^1 (-1)(3x - 2x^2)\sin(\omega_n x)\,dx}{\int_0^1 (-1)[\sin(\omega_n x)]^2\,dx}$$

$$n = 1 \xrightarrow{\omega_1 = 2.03} C_1 = \frac{\int_0^1 (3x - 2x^2)\sin(2.03x)\,dx}{\int_0^1 [\sin(2.03x)]^2\,dx} = 1.16$$

$$n = 2 \xrightarrow{\omega_2 = 4.91} C_2 = \frac{\int_0^1 (3x - 2x^2)\sin(4.91x)\,dx}{\int_0^1 [\sin(4.91x)]^2\,dx} = 0.05$$

$$n=3\xrightarrow{\omega_2=7.98}C_3=\frac{\int_0^1(3x-2x^2)\sin(7.98x)dx}{\int_0^1[\sin(7.98x)]^2dx}=0.02$$

$$\vdots$$

$$n\gg 1\xrightarrow{\omega_n=(2n-1)\frac{\pi}{2}}C_n=\frac{\int_0^1(3x-2x^2)\sin[(2n-1)\frac{\pi}{2}x]dx}{\int_0^1\{\sin[(2n-1)\frac{\pi}{2}x]\}^2dx}=\frac{8[8-\pi(2n-1)(-1)^n]}{[(2n-1)\pi]^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\theta(x,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}X_nT_n=\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{-\omega_n^2t}\sin(\omega_nx)\\&=1.16e^{-[2.03]^2t}\sin(2.03x)+0.05e^{-[4.91]^2t}\sin(4.91x)+0.02e^{-[7.98]^2t}\sin(7.98x)\\&+\ldots+\frac{8[8-\pi(2n-1)(-1)^n]}{[(2n-1)\pi]^3}e^{-[(2n-1)\frac{\pi}{2}]^2t}\sin[(2n-1)\frac{\pi}{2}x]+\ldots\end{aligned}}$$

مشاهده می شود که پاسخ نهایی توسط یک فرمول مشخص (مانند مثالهای فصل دوم) ارائه نشده و ضرایب هر جمله بصورت مجزا تعیین شده اند. عدم ارتباط بین این ضرایب یکی از ویژگیهای بارز مسائلی است که در آنها، توابع ویژه $X_n(x)$ بصورت $sin(n\pi x/l)$ یا $cos(n\pi x/l)$ نیستند. اما توجه کنید که این ضرایب سیر نزولی دارند. یعنی همیشه $C_1>C_2>C_3>\ldots>C_n$ است.

ریاضیات مهندسی
ویژه دوره کارشناسی مهندسی مکانیک

فصل چهارم
معادلات دیفرانسیل پاره ای خطی مرتبه بالا

مدرس: فرزام دادگر راد
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان

مسائل مرتبه بالا

معادلات دیفرانسیل پاره ای خطی مرتبه بالا: مسائلی که در آنها تابع مجهول دارای بیش از ۲ متغیر مستقل باشد را "مرتبه بالا" یا Higher-Order می نامند. قبلاً نیز عنوان گردید که اگر تابع مجهول u، تابعی از متغیرهای مستقل مختلف باشد، در روش جداسازی متغیرها آن را بصورت حاصلضرب توابعی که فقط تابعی از یکی از متغیرهای مستقل باشند، می نویسیم. به عنوان مثال، برای $u(x,y,z,t)$ می نویسیم:

$$u(x,y,z,t)=X(x)Y(y)Z(z)T(t)$$

نکته مهم آن است که در مسائل مرتبه بالا، تعداد مسائل مقدار ویژه افزایش می یابد. در حالت کلی، اگر معادله ای دارای n متغیر مستقل باشد، باید برای آن $(n-1)$ مسأله مقدار ویژه (یا همان مساله Sturm-Liouville) را حل نمود. بنابراین $(n-1)$ دسته مقدار ویژه و تابع ویژه خواهیم داشت.

کلیه نکته های مربوط به حل PDEهای دو متغیره که قبلاً صحبت شد، مانند غیرهمگن بودن PDE یا شرایط مرزی، به این مسائل مرتبه بالا قابل تعمیم هستند.

در حل مسائل مرتبه بالا، به سری های فوریه چند گانه نیاز خواهیم داشت. بنابراین قبل از حل یک PDE مرتبه بالا، ابتدا سری فوریه دوگانه یک تابع مانند $f(x,y)$ را بدست می آوریم.

مسائل مرتبه بالا–سری فوریه دوگانه

تابع $f(x,y)$ را درنظر بگیرید. فرض کنید f نسبت به متغیر مستقل x دارای دوره تناوب $2a$ و نسبت به y دارای دوره تناوب $2b$ باشد، بنابراین روابط زیر برقرارند:

$$f(x+2a,y)=f(x,y)\ ,\quad f(x,y+2b)=f(x,y)\ ,f(x+2a,y+2b)=f(x,y)$$

به عنوان مثال، تابع $f(x,y)=\sin(x)\cos(\pi y)$ دارای دوره تناوب 2π نسبت به x و دوره تناوب 2 نسبت به متغیر y است. البته در حالت کلی نیازی نیست که فرمول تابع به ظاهر متناوب باشد.

حال بازای هر y ثابت، بسط فوریه f را نسبت به متغیر x می نویسیم:

$$f(x,y)=\frac{A_0(y)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n(y)\cos(\frac{n\pi x}{a})+B_n(y)\sin(\frac{n\pi x}{a})]$$

$$\{A_0(y),A_n(y)\}=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}f(x,y)\{1,\cos(\frac{n\pi x}{a})\}dx\ ,\quad B_n(y)=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}f(x,y)\sin(\frac{n\pi x}{a})dx$$

اما خود $A_0(y)$ و $A_n(y)$ و $B_n(y)$ توابع متناوبی برحسب متغیر y با دوره تناوب $2b$ هستند و بنابراین می توان برای آنها سری فوریه (برحسب متغیر y) نوشت. به عنوان مثال:

$$A_n(y+2b)=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}f(x,y+2b)\cos(\frac{n\pi x}{a})dx=A_n(y)$$

$$B_n(y+2b)=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}f(x,y+2b)\sin(\frac{n\pi x}{a})dx=B_n(y)$$

مسائل مرتبه بالا–سری فوریه دوگانه

سری فوریه $A_0(y)$ و $A_n(y)$ و $B_n(y)$ که توابعی متناوب برحسب y و با دوره تناوب 2b هستند بصورت زیر است:

$$
\begin{cases}
for \quad A_0(y): \\
A_0(y) = \dfrac{a_{00}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}[a_{0m}\cos(\dfrac{m\pi y}{b}) + b_{0m}\sin(\dfrac{m\pi y}{b})] \\
a_{00} = \dfrac{1}{b}\int_{-b}^{b} A_0(y)dy = \dfrac{1}{ab}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} f(x,y)dxdy \\
a_{0m} = \dfrac{1}{b}\int_{-b}^{b} A_0(y)\cos(\dfrac{m\pi y}{b})dy = \dfrac{1}{ab}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} f(x,y)\cos(\dfrac{m\pi y}{b})dxdy \\
b_{0m} = \dfrac{1}{b}\int_{-b}^{b} A_0(y)\sin(\dfrac{m\pi y}{b})dy = \dfrac{1}{ab}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} f(x,y)\sin(\dfrac{m\pi y}{b})dxdy
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
for \quad A_n(y): \\
A_n(y) = \dfrac{a_{n0}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [a_{nm} \cos(\dfrac{m\pi y}{b}) + b_{nm} \sin(\dfrac{m\pi y}{b})] \\
a_{n0} = \dfrac{1}{b} \int_{-b}^{b} A_n(y) dy = \dfrac{1}{ab} \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} f(x,y) \cos(\dfrac{n\pi x}{a}) dx dy \\
a_{nm} = \dfrac{1}{b} \int_{-b}^{b} A_n(y) \cos(\dfrac{m\pi y}{b}) dy = \dfrac{1}{ab} \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} f(x,y) \cos(\dfrac{n\pi x}{a}) \cos(\dfrac{m\pi y}{b}) dx dy \\
b_{nm} = \dfrac{1}{b} \int_{-b}^{b} A_n(y) \sin(\dfrac{m\pi y}{b}) dy = \dfrac{1}{ab} \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} f(x,y) \cos(\dfrac{n\pi x}{a}) \sin(\dfrac{m\pi y}{b}) dx dy
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
for \quad B_n(y): \\
B_n(y) = \dfrac{c_{n0}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [c_{nm} \cos(\dfrac{m\pi y}{b}) + d_{nm} \sin(\dfrac{m\pi y}{b})] \\
c_{n0} = \dfrac{1}{b} \int_{-b}^{b} B_n(y) dy = \dfrac{1}{ab} \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} f(x,y) \sin(\dfrac{n\pi x}{a}) dx dy \\
c_{nm} = \dfrac{1}{b} \int_{-b}^{b} B_n(y) \cos(\dfrac{m\pi y}{b}) dy = \dfrac{1}{ab} \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} f(x,y) \sin(\dfrac{n\pi x}{a}) \cos(\dfrac{m\pi y}{b}) dx dy \\
d_{nm} = \dfrac{1}{b} \int_{-b}^{b} B_n(y) \sin(\dfrac{m\pi y}{b}) dy = \dfrac{1}{ab} \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} f(x,y) \sin(\dfrac{n\pi x}{a}) \sin(\dfrac{m\pi y}{b}) dx dy
\end{cases}
$$

توجه: از فرمو های به ظاهر پیچیده فوق، تنها دانستن فرمول های a_{nm}، b_{nm}، c_{nm} و d_{nm} کفایت می نماید.

$$a_{nm}=\frac{1}{ab}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}f(x,y)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dxdy$$

$$b_{nm}=\frac{1}{ab}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}f(x,y)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dxdy$$

$$c_{nm}=\frac{1}{ab}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dxdy$$

$$d_{nm}=\frac{1}{ab}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dxdy$$

در نهایت سری فوریه دوگانه تابع متناوب دومتغیره $f(x,y)$ بصورت زیر است:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
f(x,y) = \frac{a_{00}}{4} &+ \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left[a_{0m}\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + b_{0m}\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\right] \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left[a_{n0}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + c_{n0}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right] \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[a_{nm}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + b_{nm}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\right. \\
&\qquad\left. + c_{nm}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + d_{nm}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\right]
\end{aligned}
}
$$

مسائل مرتبه بالا–سری فوریه دوگانه

توجه: اگر $f(x,y)$ هم نسبت به x و هم نسبت به y فرد باشد، در اینصورت:

$$a_{nm} = b_{nm} = c_{nm} = 0$$

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} d_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

$$d_{nm} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dx\,dy$$

توجه: اگر $f(x,y)$ هم نسبت به x و هم نسبت به y زوج باشد، در اینصورت:

$$b_{nm} = c_{nm} = d_{nm} = 0$$

$$f(x,y) = \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} a_{0m} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} a_{0n} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

$$\text{where} \quad a_{nm} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dx\,dy \quad (n,m = 0,1,\ldots)$$

مسائل مرتبه بالا–سری فوریه دوگانه

مثال: سری فوریه دوگانه $f(x,y)=xy$ را با فرض اینکه دوره تناوب هم نسبت به x و هم نسبت به y برابر با ۲π باشد بنویسید.

$$f(x+2\pi,y)=f(x,y+2\pi)=f(x,y),\qquad x,y\in[-\pi,\pi],\qquad a=b=\pi$$

$$\rightarrow a_{nm}=b_{nm}=c_{nm}=0\rightarrow f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}d_{nm}\sin(\frac{n\pi x}{a})\sin(\frac{m\pi y}{b})$$

$$d_{nm}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin(\frac{n\pi x}{a})\sin(\frac{m\pi y}{b})dxdy$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi xy\sin(nx)\sin(my)dxdy$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\left(\int_0^\pi x\sin(nx)dx\right)\left(\int_0^\pi y\sin(my)dy\right)$$

$$=\frac{4(-1)^{m+n}}{\pi^2 mn}$$

$$f(x,y)=xy=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{m+n}}{\pi^2 mn}\sin(nx)\sin(my)$$

نکته ی مهم: **سری فوریه دوگانه تعمیم یافته** نیز قابل تعریف است. کافی است تعمیم سری فوریه تعمیم یافته در فصل قبل را در نظر بگیریم و آن را بصورت دو متغیره بنویسیم.

Canonical Sturm-Liouville problem for X(x):

$$\frac{d}{dx}(p_1 X') + (q_1 + \lambda s_1)X = 0 ==> find \quad X_n, \lambda_n$$

Canonical Sturm-Liouville problem for Y(y):

$$\frac{d}{dy}(p_2 Y') + (q_2 + \mu s_2)Y = 0 ==> find \quad Y_m, \mu_m$$

Orthogonality Conditions:

$$if \quad n \neq k, \; x \in [0,a] \quad \Rightarrow \quad \langle X_n, X_k \rangle_{s_1} = \int_0^a X_n X_k s_1 dx = 0$$

$$if \quad m \neq r, \; y \in [0,b] \quad \Rightarrow \quad \langle Y_m, Y_r \rangle_{s_2} = \int_0^b Y_m Y_r s_2 dx = 0$$

سری فوریه دوگانه تعمیم یافته

Extended Double Fourier Series of f(x,y) in terms of $\{X_n, Y_m\}$

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} X_n(x) Y_m(y)$$

C_{nm}: Coefficients of Extended Double Fourier Series

$$C_{nm}=\frac{\int_0^a\int_0^b f(x,y) X_n(x) Y_m(y) s_1(x) s_2(y)\,dx\,dy}{\int_0^a\int_0^b X_n^2(x) Y_m^2(y) s_1(x) s_2(y)\,dx\,dy}$$

NOTE : In most problems, the weight functions $s_1(x)$ and $s_2(y)$ are constant.
In this case

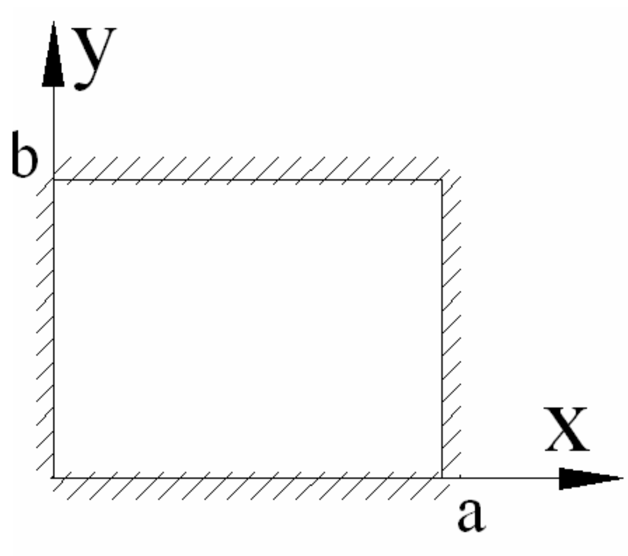
$$C_{nm}=\frac{\int_0^a\int_0^b f(x,y) X_n(x) Y_m(y)\,dx\,dy}{\int_0^a\int_0^b X_n^2(x) Y_m^2(y)\,dx\,dy}$$

مثال) معادله دیفرانسیل ارتعاشات آزاد غشای مستطیلی که تمام لبه های آن ثابت هستند بصورت زیر است. فرکانسهای طبیعی، شکل مودها و شکل پاسخ *w(x,t,y)* را بدست آورید.

$$w_{tt} = c^2 (w_{xx} + w_{yy}), \quad c = \sqrt{T/\rho}$$

$$BCs \begin{cases} @\, x = 0 : w(0, y, t) = 0 \\ @\, x = a : w(a, y, t) = 0 \\ @\, y = 0 : w(x, 0, t) = 0 \\ @\, y = b : w(x, b, t) = 0 \end{cases}$$

$$ICs \begin{cases} w(x, y, 0) = f(x, y) \\ w_t(x, y, 0) = 0 \end{cases}$$



مرحله ۱) قرار می دهیم $w(x,y,t)=X(x)Y(y)T(t)$

مرحله ۲) با جایگزینی در PDE، به ۳ مسأله ODE می رسیم.

$$XYT'' = c^2[X''YT + XY''T] \xrightarrow{\div XYT} \frac{T''}{T} = c^2[\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}]$$

سمت چپ تابعی از t و سمت راست تابعی از x و y است، پس باید حاصل عدد ثابتی باشد:

$$\boxed{\frac{T''}{T} = c^2[\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}] = \lambda} \rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{\lambda}{c^2} - \frac{Y''}{Y}$$

این بار سمت چپ تابعی از x و سمت راست تابعی از y است، پس باز هم باید حاصل عدد ثابتی باشد:

$$\frac{X''}{X} = \frac{\lambda}{c^2} - \frac{Y''}{Y} = \eta$$

بنابراین برای توابع X و Y و T داریم:

$$\frac{T''}{T} = \lambda \rightarrow \boxed{T'' - \lambda T = 0}$$

$$\frac{X''}{X} = \eta \rightarrow \boxed{X'' - \eta X = 0}$$

$$\frac{Y''}{Y} = \frac{\lambda}{c^2} - \eta = \mu \rightarrow \boxed{Y'' - \mu Y = 0}$$

حال شرایط مرزی را درنظر می گیریم:

$$\begin{cases} @x=0: w(0,y,t)=X(0)Y(y)T(t)=0 \rightarrow X(0)=0 \\ @x=a: w(a,y,t)=X(a)Y(y)T(t)=0 \rightarrow X(a)=0 \\ @y=0: w(x,0,t)=X(x)Y(0)T(t)=0 \rightarrow Y(0)=0 \\ @y=b: w(x,b,t)=X(x)Y(b)T(t)=0 \rightarrow Y(b)=0 \end{cases}$$

بنابراین دو مسآله مقدار ویژه (Sturm-Liouville) بصورت زیر خواهیم داشت:

$$X''-\eta X=0 \;,\; X(0)=0 \;,\; X(a)=0$$

$$Y''-\mu Y=0 \;,\; Y(0)=0 \;,\; Y(b)=0$$

حال باید ۳ حالت مثبت، منفی و صفر را برای η و μ درنظر بگیریم. به سادگی می توان نشان داد که بازای حالت های مثبت و صفر به جواب صفر برای X و Y خواهیم رسید. پس فرض می کنیم هر دو η و μ منفی باشند. یعنی:

$$\eta=-\alpha^2<0 \rightarrow X''+\alpha^2X=0 \rightarrow X(x)=C_1\sin(\alpha x)+C_2\cos(\alpha x)$$

$$\mu=-\beta^2<0 \rightarrow Y''+\beta^2Y=0 \rightarrow Y(y)=C_3\sin(\beta y)+C_4\cos(\beta y)$$

$$X(0)=0 \rightarrow C_2=0$$

$$X(a)=0 \rightarrow C_1\sin(\alpha a)=0 \rightarrow \alpha a=n\pi \rightarrow \boxed{\alpha_n=\frac{n\pi}{a}, X_n=\sin(\frac{n\pi x}{a})}$$

$$Y(0)=0 \rightarrow C_4=0$$

$$Y(b)=0 \rightarrow C_3\sin(\beta b)=0 \rightarrow \beta b=m\pi \rightarrow \boxed{\beta_m=\frac{\beta\pi}{b}, Y_m=\sin(\frac{m\pi y}{b})}$$

فرکانس طبیعی نیز بصورت زیر است:

$$\eta = -\alpha^2 \to \eta_n = -(\frac{n\pi}{a})^2 \,, \qquad \mu = -\beta^2 \to \mu_m = -(\frac{m\pi}{b})^2$$

$$\frac{\lambda}{c^2} - \eta = \mu \to \lambda = c^2[\mu + \eta] \to \lambda_{nm} = -c^2[(\frac{n\pi}{a})^2 + (\frac{m\pi}{b})^2] = -\omega_{nm}^2$$

$$\to \boxed{\omega_{nm} = \sqrt{(\frac{n\pi c}{a})^2 + (\frac{m\pi c}{b})^2}} \qquad m, n = 1, 2, \ldots, \infty$$

شکل مود نیز بصورت حاصلضرب X و Y است:

$$w(x, y, t) = W(x, y)T(t)$$

$$\boxed{ModeShape = W_{nm}(x, y) = X_n Y_m = \sin(\frac{n\pi x}{a})\sin(\frac{m\pi y}{b})}$$

مرحله ۳) حال به تعیین $T(t)$ می پردازیم:

$$\xrightarrow{T \equiv T_{nm}} T''_{nm} + \omega_{nm}^2 T_{nm} = 0 \to \boxed{T_{nm}(t) = M_{nm}\cos(\omega_{nm} t) + N_{nm}\sin(\omega_{nm} t)}$$

$$\Rightarrow w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} X_n(x) Y_m(y) T_{nm}(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}[M_{nm}\cos(\omega_{nm} t) + N_{nm}\sin(\omega_{nm} t)]\sin(\frac{n\pi x}{a})\sin(\frac{m\pi y}{b}) \\ w_t(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\omega_{nm}[-M_{nm}\sin(\omega_{nm} t) + N_{nm}\cos(\omega_{nm} t)]\sin(\frac{n\pi x}{a})\sin(\frac{m\pi y}{b}) \end{array}}$$

مرحله ۴) حال باید ضرایب مجهول را از شرایط اولیه بدست آورد:

$$w(x,y,0)=f(x,y)\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}M_{nm}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)=f(x,y)$$

$$w_t(x,y,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\omega_{nm}N_{nm}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)=0\rightarrow \boxed{N_{nm}=0}$$

کافی است بسط فوریه دو گانه سینوسی *f(x,y)* را بنویسیم:

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}d_{nm}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

$$\rightarrow M_{nm}=d_{nm}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dx\,dy$$

ریاضیات مهندسی
ویژه دوره کارشناسی مهندسی مکانیک

فصل پنجم
تبدیلات فوریه نامتناهی و انتگرال فوریه
(فصل ۱۲ کتاب درسی)

مدرس: فرزام دادگر راد
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان

تبدیل و انتگرال فوریه

تبدیلات فوریه دو دسته هستند. یک دسته از آنها، تبدیلات فوریه متناهی هستند که جهت حل مسائلی با دامنه محدود (مثلاً $0 \le x \le l$) کاربرد دارند. دسته دوم، تبدیلات فوریه نامتناهی هستند که در مسائلی با دامنه بینهایت (یعنی $-\infty < x < \infty$ یا $0 \le x < \infty$) بکار میروند.

از آنجا که ما روش جداسازی متغیرها را در حل مسائل متناهی فراگرفته ایم، فعلاً به تبدیلات فوریه متناهی نمی پردازیم. در عوض در این فصل، توجه خود را به مسائل نامتناهی معطوف می نماییم.

با توجه باینکه قرار است انتگرال فوریه جایگزین سری فوریه در حل مسائل گردد، لذا انتگرال فوریه را براساس سری فوریه تعریف می نماییم. فرض کنید تابع $f(x)$ با دامنه $-\infty < x < \infty$ یک تابع متناوب با دوره تناوب $2l$ باشد، در اینصورت می نویسیم:

$$\begin{cases} f_l(x) = f(x), & -l \le x \le l \\ f_l(x+2l) = f_l(x) \end{cases}$$

حال یک تابع غیرتناوبی با دامنه بینهایت $f(x)$ را درنظر بگیرید. عملاً می توان گفت که این تابع، یک تابع تناوبی با دوره تناوب بینهایت است. بنابراین می توان نوشت:

$$\lim_{l \to \infty} f_l(x) = f(x)$$

بعبارت دیگر، گوییم $f(x)$ دارای حد تناوبی $f_l(x)$ است وقتی که داشته باشیم $l \to \infty$

حال هدف آن است که سری فوریه $f_l(x)$ را بدست آوریم. در اینصورت می نویسیم:

$$f_l(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\frac{n\pi x}{l}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{l})]$$

تبدیل و انتگرال فوریه

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(y)dy\ ,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(y)\cos(\frac{n\pi y}{l})dy\ ,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(y)\sin(\frac{n\pi y}{l})dy$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$f_l(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(y)dy+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(y)\cos(\frac{n\pi y}{l})dy\right)\cos(\frac{n\pi x}{l})+\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(y)\sin(\frac{n\pi y}{l})dy\right)\sin(\frac{n\pi x}{l})\right]$$

حال تغییر متغیر زیر را تعریف می کنیم:

$$\boxed{\frac{n\pi}{l}=\omega_n}\rightarrow\omega_{n+1}-\omega_n=\frac{\pi}{l}=\Delta\omega\rightarrow\frac{1}{l}=\frac{\Delta\omega}{\pi}\quad ,\quad l\rightarrow\infty\Rightarrow\Delta\omega\rightarrow d\omega\Rightarrow\boxed{\frac{1}{l}=\frac{d\omega}{\pi}}$$

با جایگزینی در سری فوریه بدست می آید:

$$f_l(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(y)dy+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left[\left(\int_{-l}^{l}f(y)\cos(\omega_n y)dy\right)\cos(\omega_n x)+\left(\int_{-l}^{l}f(y)\sin(\omega_n y)dy\right)\sin(\omega_n x)\right]\Delta\omega$$

$$\rightarrow f_l(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(y)dy+\sum_{n=1}^{\infty}F(\omega_n,x)\Delta\omega$$

تبدیل و انتگرال فوریه

$$(l \to \infty) \Rightarrow (\Delta\omega \to d\omega) \qquad \Rightarrow \quad f_l(x) = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(y)dy + \int_0^{\infty} F(\omega,x)d\omega$$

حال فرض کنید انتگرال تابع f(x) در کل دامنه محدود باشد، در اینصورت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\,dy = M < \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(y)dy = 0 \quad \Rightarrow f_l(x) = \int_0^{\infty} F(\omega,x)d\omega$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\cos(\omega x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos(\omega y)dy\right) + \sin(\omega x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\sin(\omega y)dy\right)\right]d\omega$$

در این مرحله تعریف می کنیم:

$$\xrightarrow[\textit{Transformation}]{\textit{Fourier}} \boxed{A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos(\omega y)dy}, \boxed{B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\sin(\omega y)dy}$$

$$\xrightarrow{\textit{Fourier Integral}} \boxed{f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\cos(\omega x)A(\omega) + \sin(\omega x)B(\omega)\right]d\omega}$$

به زوج مرتب (A(ω),B(ω)) تبدیلات فوریه (با نمایش حقیقی) و به انتگرال فوق، انتگرال فوریه گویند.

تبدیل و انتگرال فوریه

مثال: برای تابع زیر، تبدیلات و انتگرال فوریه را بدست آورید:

$$f(x)=\begin{cases}1 & if \quad |x|<1\\ 0 & if \quad |x|\geq 1\end{cases}$$

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos(\omega y)dy=\int_{-1}^{1}\cos(\omega y)dy=\left.\frac{\sin(\omega y)}{\omega}\right|_{-1}^{1}=\frac{2\sin(\omega)}{\omega}$$

$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\sin(\omega y)dy=\int_{-1}^{1}\sin(\omega y)dy=-\left.\frac{\cos(\omega y)}{\omega}\right|_{-1}^{1}=0$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\cos(\omega x)A(\omega)+\sin(\omega x)B(\omega)\right]d\omega=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos(\omega x)\sin(\omega)}{\omega}d\omega$$

توجه: در نقاط پیوستگی، حاصل انتگرال فوریه برابر خود *f(x)* و در نقاط ناپیوستگی، انتگرال فوریه برابر میانگین حدهای چپ و راست است. به عنوان نمونه، در مثال حل شده فوق، نقطه $x=0$ یک نقطه پیوستگی و $x=1$ یک نقطه ناپیوستگی است. در این دو نقطه داریم:

$$@x=0:\ f(x)=1=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos(0)\frac{\sin(\omega)}{\omega}d\omega\rightarrow\boxed{\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(\omega)}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}}\quad(*)$$

$$@x=1:\ f(1^-)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=1,\quad f(1^+)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=0$$

$$\rightarrow\frac{f(1^-)+f(1^+)}{2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}2\cos(\omega)\frac{\sin(\omega)}{\omega}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(2\omega)}{(2\omega)}d(2\omega)\rightarrow\underline{|(*)}$$

تبدیل و انتگرال فوریه

توجه: اگر تابع $f(x)$ فرد باشد، $A=0$ و اگر $f(x)$ زوج باشد، $B=0$ خواهد بود:

$$\xrightarrow{f(x):odd} A(\omega)=0,\quad B(\omega)=2\int_0^\infty f(y)\sin(\omega y)dy\ ,f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin(\omega x)B(\omega)d\omega$$

$$\xrightarrow{f(x):even} B(\omega)=0,\quad A(\omega)=2\int_0^\infty f(y)\cos(\omega y)dy\ ,f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(\omega x)A(\omega)d\omega$$

توجه: اگر تابع $f(x)$ در دامنه $[0,\infty)$ تعریف شده باشد، می توان آنرا بصورت فرد یا زوج بسط داد (مشابه بسطهای سینوسی و کسینوسی که در فصل اول آموختید). در این حالت نیز دقیقاً از فرمولهای فوق استفاده می گردد:

$$\xrightarrow{\text{odd expansion}} A(\omega)=0,\quad B(\omega)=2\int_0^\infty f(y)\sin(\omega y)dy\ ,f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin(\omega x)B(\omega)d\omega$$

$$\xrightarrow{\text{even expansion}} B(\omega)=0,\quad A(\omega)=2\int_0^\infty f(y)\cos(\omega y)dy\ ,f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(\omega x)A(\omega)d\omega$$

صورت مختلط تبدیل و انتگرال فوریه: معمولاً وقتی صحبت از تبدیل فوریه می شود، منظور فرم مختلط آن می باشد. حال انتگرال فوریه را که قبلاً بدست آوردیم بصورت زیر می نویسیم:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_{-\infty}^\infty f(y)[\cos(\omega y)\cos(\omega x)+\sin(\omega y)\sin(\omega x)]dy\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\omega=0}^{\omega=\infty}\left[\int_{-\infty}^\infty f(y)\cos[\omega(y-x)]dy\right]d\omega ==> \text{is even w.r.t } \omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty}\int_{-\infty}^\infty f(y)\cos[\omega(y-x)]dyd\omega$$

تبدیل و انتگرال فوریه

از طرف دیگر، با توجه به فرد بودن تابع سینوس داریم:

$$\frac{i}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\sin[\omega(y-x)]dyd\omega = 0 \quad \text{(since the integrand is odd w.r.t } \omega)$$

حال اگر دو معادله اخیر را باهم جمع کنیم:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\{\cos[\omega(y-x)]+i\sin[\omega(y-x)]\}dyd\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i\omega(y-x)}dyd\omega=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i\omega y}dy\right]e^{-i\omega x}d\omega$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega x}d\omega$$

در نهایت، تبدیل فوریه مختلط و معکوس آن بصورت زیر خواهند بود. توجه داریم که تبدیل فوریه، تابع $f(x)$ را تبدیل به $F(\omega)$ می کند. به عبارت دیگر، فضای x را به فضای ω تبدیل می نماید.

Complex Fourier Transformation

$$\mathfrak{F}\left(f(x)\right)=F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\omega x}dx \qquad (x\to\omega)$$

$$\mathfrak{F}^{-1}\left(F(\omega)\right)=f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,e^{-i\omega x}d\omega \qquad (\omega\to x)$$

توجه: درروابط فوق، جای علامت های مثبت و منفی در تابع نمایی می تواند تعویض گردد.

مثال: مطلوبست محاسبه تبدیل فوریه تابع *f(x)=exp(-x²)*

$$\mathfrak{F}\left(f(x)\right)=F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,e^{i\omega x}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-[x^2-i\omega x]}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-[x-\frac{1}{2}i\omega]^2}e^{-\frac{\omega^2}{4}}dx$$

$$=\frac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-[x-\frac{1}{2}i\omega]^2}dx=\frac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}ds=\frac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{\sqrt{2}}$$

$NOTES:$

$$(1): x^2-i\omega x=(x)^2-2x\frac{i\omega}{2}+\left(\frac{i\omega}{2}\right)^2-\left(\frac{i\omega}{2}\right)^2=[x-\frac{1}{2}i\omega]^2+\frac{\omega^2}{4}$$

$$(2): if\ \ x-\frac{1}{2}i\omega=s\rightarrow dx=ds$$

$$(3): \int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}ds=\sqrt{\pi}\qquad \text{and}\qquad \int_{0}^{\infty}e^{-s^2}ds=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

خواص تبدیل فوریه

۱) خاصیت خطی بودن

$$\text{If}\quad \mathfrak{F}\left(f(x)\right)=F(\omega)\quad \text{and}\quad \mathfrak{F}\left(g(x)\right)=G(\omega)$$

$$\forall a,b\in R\ \rightarrow\ \mathfrak{F}\left(af(x)+bg(x)\right)=aF(\omega)+bG(\omega)$$

۲) خاصیت انتقال

$$\text{If}\quad \mathfrak{F}\left(f(x)\right)=F(\omega)\quad \text{and}\quad \forall c\in R$$

$$\rightarrow\ \boxed{\mathfrak{F}\left(f(x-c)\right)=e^{ic\omega}F(\omega)}$$

$PROOF:$

$$\mathfrak{F}\left(f(x-c)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-c)\,e^{i\omega x}dx$$

$$\Rightarrow\ Let\ x-c=z\ \Rightarrow x=c+z\ ,\ dx=dz$$

$$\Rightarrow \mathfrak{F}\left(f(x-c)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\,e^{i\omega(z+c)}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\,e^{i\omega z}e^{ic\omega}dz=$$

$$=e^{i\omega c}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\,e^{i\omega z}dz\right]=e^{ic\omega}F(\omega)$$

۳) خاصیت تغییر مقیاس

If $\mathfrak{F}\left(f(x)\right)=F(\omega)$ and $\forall c \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow \boxed{\mathfrak{F}\left(f(cx)\right)=\frac{1}{c}F(\frac{\omega}{c})}$$

PROOF :

$$\mathfrak{F}\left(f(cx)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(cx)\,e^{i\omega x}\,dx$$

$$\Rightarrow \ Let\ cx=z \Rightarrow x=\frac{z}{c},\ dx=\frac{dz}{c}$$

$$\Rightarrow \mathfrak{F}\left(f(cx)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,e^{i\omega(\frac{z}{c})}\frac{dz}{c}=\frac{1}{c}.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,e^{i(\frac{\omega}{c})z}dz$$

Now let $\varpi=\dfrac{\omega}{c}$

$$\Rightarrow \mathfrak{F}\left(f(cx)\right)=\frac{1}{c}.\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,e^{i\varpi z}dz\right]=\frac{1}{c}.F(\varpi)=\frac{1}{c}F(\frac{\omega}{c})$$

۴) خاصیت تبدیل مشتق: اگر تبدیل فوریه $f(x)$ و $f'(x)$ هردو موجود باشند و $f(x)$ در بینهایت صفر شود، داریم:

$$\boxed{\mathfrak{F}\left(f'(x)\right)=(-i\omega)F(\omega)}$$

$PROOF:$

$$\mathfrak{F}\left(f'(x)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\,e^{i\omega x}dx$$

$f'(x)dx=dv\rightarrow f(x)=v(x)$ and $e^{i\omega x}=u(x)\rightarrow(i\omega)e^{i\omega x}dx=du$

$$\rightarrow\mathfrak{F}\left(f'(x)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\underbrace{e^{i\omega x}f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{0}-\int_{-\infty}^{\infty}(i\omega)f(x)e^{i\omega x}dx\right]$$

$$=(-i\omega)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\omega x}dx=(-i\omega)F(\omega)$$

۵) خاصیت تبدیل مشتق های مرتبه بالا: اگر تبدیل فوریه $f(x)$ و $f'(x)$ و ... $f^{(n)}(x)$ همگی موجود باشند و در ضمن، $f(x)$ و $f'(x)$ و ... $f^{(n-1)}(x)$ همگی در بینهایت صفر شوند، داریم (اثبات بدیهی با استقرا):

$$\boxed{\mathfrak{F}\left(f^{(n)}(x)\right)=(-i\omega)^{n}F(\omega)}$$

٦) خاصیت جابجایی مشتق نسبت به متغیرهای دیگر و تبدیل فوریه: اگر $f(x,t)$ نسبت به t مشتقپذیر باشد و نسبت به x نیز دارای تبدیل فوریه باشد، در اینصورت (اثبات در کلاس):

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{F}\left(f(x,t)\right)=\mathfrak{F}\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}F(\omega,t)} \quad Note: x\rightarrow\omega$$

٧) خاصیت قابلیت تعریف انتگرال کانولوشن: اگر $f(x)$ و $g(x)$ در بازه بینهایت تعریف شده باشند، انتگرال زیر را، انتگرال کانولوشن f و g می نامیم ($Convolution\ Integral$):

$$\boxed{f(x)\otimes g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-z)g(z)dz}$$

براساس تعریف انتگرال کانولوشن، داریم:

$$\boxed{\mathfrak{F}\left(f(x)\otimes g(x)\right)=\mathfrak{F}(f(x))\mathfrak{F}(g(x))=F(\omega)G(\omega)}$$

$$\rightarrow \boxed{\mathfrak{F}^{-1}\left(F(\omega)G(\omega)\right)=f(x)\otimes g(x)}$$

$$PROOF: \mathfrak{F}\left(f(x)\otimes g(x)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\otimes g(x)e^{i\omega x}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-z)g(z)dz\right]e^{i\omega x}\left[e^{i\omega z}e^{-i\omega z}\right]dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(z)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-z)e^{i\omega(x-z)}dx\right]e^{i\omega z}dz \rightarrow$$

$$\text{Let} \quad x - z = y \quad \rightarrow \quad dx = dy$$

$$\rightarrow \mathfrak{F}\big(f(x) \otimes g(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i\omega y}dy\right]e^{i\omega z}dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\left[F(\omega)\right]e^{i\omega z}dz$$

$$= F(\omega)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\,e^{i\omega z}dz\right] = F(\omega)G(\omega)$$

یادآوری: بخاطر داریم که انتگرال کانولوشن براساس تبدیل لاپلاس نیز تعریف مي شد. منتها توجه شود که انتگرال کانولوشن براساس تبدیل لاپلاس و نیز براساس تبدیل فوریه، کاملاً با هم فرق دارند. فقط برخی خواص آنها مشابه هم است. براساس تبدیل لاپلاس، داشتیم:

Laplace Transform ($t \rightarrow s$): $\mathfrak{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$

Convolution Integral based on Laplace: $f(t) * g(t) = \int_0^{t} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$

Laplace Transform of Convolution Integral: $\mathfrak{L}(f(t) * g(t)) = F(s)G(s)$

۸) تبدیل فوریه تابع پله: اگر یک $\beta>0$ عدد حقیقی و $\hat{u}_a(x)$ تابع پله به مرکز a باشد، تبدیل فوریه این تابع بصورت زیر بدست می اید:

$$\mathfrak{F}\left(\hat{u}_a(x)e^{-\beta x}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}_a(x)e^{-\beta x}e^{i\omega x}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{\infty}e^{-[\beta-i\omega]x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\frac{1}{-[\beta-i\omega]}.e^{-[\beta-i\omega]x}\Big|_a^{\infty}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\frac{e^{-[\beta-i\omega]a}}{\beta-i\omega}=A$$

$$\rightarrow \boxed{\mathfrak{F}\left(\hat{u}_a(x)\right)=\lim_{\beta\to 0}A=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\frac{e^{i\omega a}}{-i\omega}=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}.\frac{e^{i\omega a}}{\omega}} \rightarrow \boxed{\mathfrak{F}\left(\hat{u}(x)\right)=\frac{i}{\omega\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{-i\omega\sqrt{2\pi}}}$$

۹) تبدیل فوریه تابع پالس: تابع پالس و نیز تابع پالس واحد بصورت زیر تعریف می شوند. تبدیل فوریه تابع پالس نیز بصورت زیر است:

$$P_{h,\varepsilon,a}(x)=\begin{cases} h & if \quad a-\varepsilon\le x\le a+\varepsilon \\ 0 & \text{in other points}\end{cases}$$

$$if\ \ h=\frac{1}{2\varepsilon}\rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}P_{h,\varepsilon,a}(x)dx=1\rightarrow\ P\ is\ called\ the\ unit\ \ pulse$$

$$\boxed{\mathfrak{F}\left(P_{h,\varepsilon,a}(x)\right)=\frac{2h\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega a}\frac{\sin(\omega\varepsilon)}{\omega\varepsilon}}$$

PROOF :

$$\mathfrak{F}\left(P_{h,\varepsilon,a}(x)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}P_{h,\varepsilon,a}(x)e^{i\omega x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}he^{i\omega x}dx$$

$$=\frac{h}{\sqrt{2\pi}}.\frac{e^{i\omega x}}{i\omega}\Bigg|_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}=\frac{h}{\sqrt{2\pi}}.\frac{e^{i\omega a}}{i\omega}.(e^{i\omega\varepsilon}-e^{-i\omega\varepsilon}).\frac{2}{2}$$

$$=\frac{2h}{\sqrt{2\pi}}.\frac{e^{i\omega a}}{\omega}.\left(\frac{e^{i\omega\varepsilon}-e^{-i\omega\varepsilon}}{2i}\right)=\frac{2h\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}.\frac{e^{i\omega a}}{\omega\varepsilon}\sin(\omega\varepsilon)$$

۱۰) **تبدیل فوریه تابع ضربه** $(impulse)$: تابع ضربه و تبدیل فوریه آن نیز بصورت زیر است:
نام دیگر آن چیست؟

$$\delta(x-a)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ h=\frac{1}{2\varepsilon}}}P_{h,\varepsilon,a}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon} & if\quad a-\varepsilon\le x\le a+\varepsilon\\ 0 & \text{in other points}\end{cases}$$

$$\boxed{\mathfrak{F}\left(\delta(x-a)\right)=\frac{e^{i\omega a}}{\sqrt{2\pi}}}$$

$$if\quad a=0\rightarrow\boxed{\mathfrak{F}\left(\delta(x)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}$$

$PROOF:$

$$\mathfrak{F}\left(\delta(x-a)\right)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ h=\frac{1}{2\varepsilon}}}\mathfrak{F}\left(P_{h,\varepsilon,a}(x)\right)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ h=\frac{1}{2\varepsilon}}}\frac{2h\varepsilon e^{i\omega a}}{\sqrt{2\pi}}.\frac{\sin(\omega\varepsilon)}{\omega\varepsilon}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.2(\frac{1}{2\varepsilon}).e^{i\omega a}=\frac{e^{i\omega a}}{\sqrt{2\pi}}$$

توجه: بخاطر می آوریم که برای تابع پیوسته $g(x)$ داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)g(x)dx=g(a)$$

۱۱) قابلیت تعریف تبدیل فوریه کسینوسی نامتناهی: براساس تبدیل فوریه، تبدیل فوریه کسینوسی برای توابع تعریف شده در بازه $[0,\infty)$ بصورت زیر تعریف می شود:

Cosine Fourier Transformation

$$\mathfrak{F}_c\left(f(x)\right)=F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\cos(\omega x)dx\qquad(x\to\omega)$$

$$\mathfrak{F}_c^{-1}\left(F_c(\omega)\right)=f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_c(\omega)\cos(\omega x)d\omega\qquad(\omega\to x)$$

۱۱) قابلیت تعریف تبدیل فوریه سینوسی نامتناهی: براساس تبدیل فوریه، تبدیل فوریه سینوسی برای توابع تعریف شده در بازه $[0,\infty)$ بصورت زیر تعریف می شود:

Sine Fourier Transformation

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}\left(f(x)\right) = F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin(\omega x)dx \qquad (x \to \omega)$$

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}^{-1}\left(F_s(\omega)\right) = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F_s(\omega)\sin(\omega x)d\omega \qquad (\omega \to x)$$

۱۲) خاصیت تبدیل مشتق مرتبه ۲ برای تبدیلات فوریه سینوسی و کسینوسی نامتناهی: براساس تعریف تبدیلات فوریه سینوسی و کسینوسی داریم:

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}\left(f''(x)\right) = -\omega^2\mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}\left(f(x)\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega f(0)$$

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{c}}\left(f''(x)\right) = -\omega^2\mathfrak{F}_{\mathfrak{c}}\left(f(x)\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,f'(0)$$

$PROOF:$

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{c}}\left(f''(x)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f''(x)\cos(\omega x)dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[f'(x)\cos(\omega x)\Big|_0^{\infty} + \omega\int_0^{\infty} f'(x)\sin(\omega x)dx\right] \quad \to$$

$$\rightarrow \mathfrak{F}_c\left(f''(x)\right) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0) + \omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(x)\sin(\omega x)\Big|_0^\infty - \omega^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos(\omega x)dx$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0) - \omega^2\mathfrak{F}_c\left(f(x)\right) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0) - \omega^2 F_c(\omega)$$

توجه در حل معادلات دیفرانسیل، باید نکات زیر را درنظر داشت:

۱)از تبدیل فوریه مختلط نامتناهی وقتی استفاده می شود که

الف) دامنه تعریف مسأله، بازه $(-\infty, \infty)$ باشد.

ب) مقدار تابع مجهول و مشتقهای آن در ∞ و $-\infty$ صفر شود.

۲) از تبدیل فوریه کسینوسی نامتناهی وقتی استفاده می شود که:

الف) دامنه تعریف مسأله، بازه $[0, \infty)$ باشد.

ب) مقدار تابع مجهول و مشتقهای آن در ∞ صفر شود.

ج) مقدار مشتق تابع در نقطه $x=0$ داده شده باشد.

۳) از تبدیل فوریه سینوسی نامتناهی وقتی استفاده می شود که:

الف) دامنه تعریف مسأله، بازه $[0, \infty)$ باشد.

ب) مقدار تابع مجهول و مشتقهای آن در ∞ صفر شود.

ج) مقدار خود تابع در نقطه $x=0$ داده شده باشد.

مثال: مطلوبست حل PDE مقابل

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \delta(t)\delta(x) \quad or \quad u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in (-\infty,\infty), \quad t \ge 0 \\ u(x,0) = \delta(x), \quad u(\pm\infty,t) = u_x(\pm\infty,t) = 0 \end{cases}$$

حل: شرایط برای اعمال تبدیل فوریه مختلط نامتناهی بر روی متغیر x مهیاست:

$$\mathfrak{F}\left(u(x,t)\right) = U(\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,e^{i\omega x}dx \qquad (x \to \omega)$$

$$\mathfrak{F}\left(u_{xx}(x,t)\right) = (-i\omega)^2\,\mathfrak{F}\left(u(x,t)\right) = -\omega^2 U(\omega,t)$$

$$\mathfrak{F}\left(u_t(x,t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{F}\left(u(x,t)\right) = U_t(\omega,t)$$

حال از دوطرف PDE تبدیل فوریه (مختلط نامتناهی) می گیریم و از روابط فوق نیز استفاده می نماییم:

$$\mathfrak{F}\left(u_t - u_{xx}\right) = \mathfrak{F}\left(\delta(t)\delta(x)\right) \to U_t(\omega,t) + \omega^2 U(\omega,t) = \frac{\delta(t)}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\to \mu(t) = \exp\int \omega^2 dt = e^{\omega^2 t}$$

$$\to [e^{\omega^2 t}U(\omega,t)]' = \frac{\delta(t)}{\sqrt{2\pi}}e^{\omega^2 t} \xrightarrow{\int} e^{\omega^2 t}U(\omega,t) = \int \frac{\delta(t)}{\sqrt{2\pi}}e^{\omega^2 t}dt + C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + C$$

$$\to U(\omega,t) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + C)e^{-\omega^2 t} \qquad (*)$$

تبدیل و انتگرال فوریه-مثال

جهت بدست آوردن ثابت انتگرالگیری C می توان از شرط اولیه نیز تبدیل فوریه گرفت:

$$u(x,0)=\delta(x)\rightarrow \mathfrak{F}\big(u(x,0)\big)=\mathfrak{F}\big(\delta(x)\big)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\quad\rightarrow\quad U(\omega,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

حال با قرار دادن $t=0$ در رابطه * که بدست آوردیم خواهیم داشت:

$$U(\omega,0)=\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+C\Big)e^{-\omega^2(0)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\qquad\rightarrow\qquad C=0$$

$$\rightarrow U(\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\omega^2 t}$$

در مرحله آخر نیز کافی است یک تبدیل فوریه معکوس از رابطه فوق بگیریم:

$$u(x,t)=\mathfrak{F}^{-1}\big(U(\omega,t)\big)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}U(\omega,t)\,e^{-i\omega x}\,d\omega\qquad\qquad(\omega\rightarrow x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\omega^2 t}\;e^{-i\omega x}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-[\omega^2 t+i\omega x]}\,d\omega$$

$$\omega^2 t+i\omega x=(\omega\sqrt{t})^2+2(\omega\sqrt{t})\Big(\frac{ix}{2\sqrt{t}}\Big)+\Big(\frac{ix}{2\sqrt{t}}\Big)^2-\Big(\frac{ix}{2\sqrt{t}}\Big)^2=\Big[\omega\sqrt{t}+\frac{ix}{2\sqrt{t}}\Big]^2+\frac{x^2}{4t}$$

$$\rightarrow u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-[\omega\sqrt{t}+\frac{ix}{2\sqrt{t}}]^2}e^{-\frac{x^2}{4t}}\,d\omega=\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-[\omega\sqrt{t}+\frac{ix}{2\sqrt{t}}]^2}\,d\omega$$

تبدیل و انتگرال فوریه-مثال

$$Let \quad z=\omega\sqrt{t}+\frac{ix}{2\sqrt{t}} \to \quad dz=\sqrt{t}\,d\omega \to \quad d\omega=\frac{dz}{\sqrt{t}}$$

$$\to u(x,t)=\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\frac{dz}{\sqrt{t}}=\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\pi\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz \to \boxed{u(x,t)=\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}}$$

مثال: مطلوبست حل PDE مقابل

$$\begin{cases} u_t-\alpha^2 u_{xx}=0 \ , \quad x\in[0,\infty)\ , \quad t\geq 0 \\ u(x,0)=0 \ , \quad u_x(0,t)=g(t)=1\ , \qquad u(\infty,t)=u_x(\infty,t)=0 \end{cases}$$

حل: شرایط برای اعمال تبدیل فوریه کسینوسی نامتناهی بر روی متغیر x مهیاست:

$$\mathfrak{F}_c\left(u(x,t)\right)=U(\omega,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\cos(\omega x)dx \qquad (x\to\omega)$$

$$\mathfrak{F}_c\left(u_{xx}(x,t)\right)=-\omega^2\mathfrak{F}_c\left(u(x,t)\right)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}u_x(0,t)=-\omega^2 U(\omega,t)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}g(t)$$

$$\mathfrak{F}_c\left(u_t(x,t)\right)=\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{F}_c\left(u(x,t)\right)=U_t(\omega,t)$$

$$u(x,0)=0 \to \ \mathfrak{F}_c\left(u(x,0)\right)=U(\omega,0)=0$$

حال از دوطرف PDE تبدیل فوریه کسینوسی نامتناهی می گیریم و از روابط قبل نیز استفاده می نماییم:

$$\mathfrak{F}_c\left(u_t-\alpha^2 u_{xx}\right)=\mathfrak{F}_c\left(0\right)=0\rightarrow U_t(\omega,t)-\alpha^2[-\omega^2 U(\omega,t)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}g(t)]=0$$

$$\rightarrow U_t(\omega,t)+(\alpha\omega)^2 U(\omega,t)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha^2 g(t)$$

$$\rightarrow \mu(t)=\exp\int(\alpha\omega)^2 dt=e^{(c\omega)^2 t}$$

$$\rightarrow [e^{(\alpha\omega)^2 t}U(\omega,t)]'=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha^2 g(t)e^{(\alpha\omega)^2 t}\xrightarrow{\int_0^t(\ )dt}$$

$$\rightarrow e^{(\alpha\omega)^2 t}U(\omega,t)-\underbrace{U(\omega,0)}_{0}=\int_0^t\left(\left[-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha^2 g(t)e^{(\alpha\omega)^2 t}\right]\right)dt$$

$$\rightarrow U(\omega,t)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha^2 e^{-(\alpha\omega)^2 t}\int_0^t g(t)e^{(\alpha\omega)^2 t}dt$$

از رابطه فوق تبدیل فوریه کسینوسی نامتناهی معکوس می گیریم:

$$u(x,t)=\mathfrak{F}_c^{-1}\left(U(\omega,t)\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty U(\omega,t)\cos(\omega x)\,d\omega \qquad (\omega\rightarrow x)$$

$$=-\frac{2\alpha^2}{\pi}\int_0^\infty\left\{\cos(\omega x)\left[e^{-(\alpha\omega)^2 t}\int_0^t g(t)e^{(\alpha\omega)^2 t}dt\right]\right\}d\omega$$

تبدیل و انتگرال فوریه-مثال

حال اگر مطابق صورت مسأله، بگیریم $g(t)=1$ خواهیم داشت:

$$\int_0^t g(t)e^{(\alpha\omega)^2 t}dt=\int_0^t e^{(\alpha\omega)^2 t}dt=\frac{1}{(\alpha\omega)^2}e^{(\alpha\omega)^2 t}\Big|_0^t=\frac{1}{(\alpha\omega)^2}[e^{(\alpha\omega)^2 t}-1]$$

$$U(\omega,t)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha^2 e^{-(\alpha\omega)^2 t}\int_0^t g(t)e^{(\alpha\omega)^2 t}dt=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\omega^2}[1-e^{-(\alpha\omega)^2 t}]$$

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty U(\omega,t)\cos(\omega x)\,d\omega$$

$$\rightarrow \boxed{u(x,t)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{1}{\omega^2}[1-e^{-(\alpha\omega)^2 t}]\cos(\omega x)\right\}d\omega}$$

توجه: مسأله فوق با اعمال تبدیل لاپلاس روی متغیر t و استفاده از انتگرال کانولوشن، ساده تر قابل حل می باشد. منتها در اینجا از اعمال تبدیل لاپلاس صرفنظر نموده ایم.

برخی روابط مفید:

$$\mathfrak{F}_c\left(e^{-kx}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{k}{\omega^2+k^2}\rightarrow \mathfrak{F}_c^{-1}\left(\frac{k}{\omega^2+k^2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-kx}$$

$$\mathfrak{F}_c\left(\frac{k}{x^2+k^2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-k\omega}\rightarrow \mathfrak{F}_c^{-1}\left(e^{-k\omega}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{k}{x^2+k^2}$$

برخی روابط مفید (ادامه)**:**

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}\left(e^{-kx}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{\omega}{\omega^2+k^2}\rightarrow\mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega^2+k^2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-kx}$$

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}\left(\frac{x}{x^2+k^2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-k\omega}\rightarrow\mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}^{-1}\left(e^{-k\omega}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{x}{x^2+k^2}$$

$$\mathfrak{F}\left(e^{-k|x|}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{k}{\omega^2+k^2}\rightarrow\mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{k}{\omega^2+k^2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.e^{-k|x|}$$

$$\mathfrak{F}\left(\frac{k}{x^2+k^2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-k|\omega|}\rightarrow\mathfrak{F}^{-1}\left(e^{-k|\omega|}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{k}{x^2+k^2}$$

مثال: مطلوبست حل PDE مقابل

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0\ ,\quad x\in(-\infty,\infty)\,,\quad y\in[0,\infty)\\ u(x,0)=f(x)\\ u(\pm\infty,y)=u_x(\pm\infty,y)=0\,,\quad u(x,\infty)=u_y(x,\infty)=0\end{cases}$$

حل: با روشهای (۱) و (۲) زیر و یا با استفاده توأمان از هر دو روش می توان این مسأله را حل نمود:

۱) اعمال تبدیل فوریه مختلط روی متغیر x (اصولاً تبدیل فوریه مختلط ارجحیت دارد)

۲) اعمال تبدیل فوریه سینوسی روی متغیر y

تبدیل و انتگرال فوریه-مثال

در اینجا ما روش اول را در پیش گرفته، روی متغیر x تبدیل فوریه مختلط را اعمال می نماییم:

$$\mathfrak{F}\left(u(x,y)\right)=U(\omega,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)\,e^{i\omega x}dx \qquad (x\to\omega)$$

$$\mathfrak{F}\left(u_{xx}(x,y)\right)=(-i\omega)^2\,\mathfrak{F}\left(u(x,y)\right)=-\omega^2U(\omega,y)$$

$$\mathfrak{F}\left(u_{yy}(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial y^2}\mathfrak{F}\left(u(x,y)\right)=U_{yy}(\omega,y)$$

$$u(x,0)=f(x)\to\mathfrak{F}\left(u(x,0)\right)=\mathfrak{F}\left(f(x)\right)\to U(\omega,0)=F(\omega)$$

حال از دوطرف PDE تبدیل فوریه مختلط نامتناهی می گیریم و از روابط فوق نیز استفاده می نماییم:

$$\mathfrak{F}\left(u_{xx}+u_{yy}\right)=\mathfrak{F}\left(0\right)=0\to U_{yy}-\omega^2U=0$$

$$\to U(\omega,y)=A(\omega)e^{\omega y}+B(\omega)e^{-\omega y}$$

$$U(\omega,+\infty)=0\to\begin{cases} if\ \ \omega>0\to A(\omega)=0\ \ ,\ U(\omega,y)=B(\omega)e^{-\omega y}\\ if\ \ \omega<0\to B(\omega)=0\ \ ,\ U(\omega,y)=A(\omega)e^{\omega y}\end{cases}$$

$$\to unified\ \ solution: \qquad U(\omega,y)=C(\omega)e^{-|\omega|y}$$

$$U(\omega,0)=F(\omega)\to\ C(\omega)e^{-|\omega|(0)}=F(\omega)\to C(\omega)=F(\omega)$$

$$\to\boxed{U(\omega,y)=F(\omega)e^{-|\omega|y}}$$

حال باید از معادله فوق تبدیل فوریه معکوس بگیریم. منتها با کمی دقت متوجه می شویم که سمت دوم، از حاصلضرب دو تابع تشکیل شده که معکوس فوریه آنها را می دانیم. پس کافی است از انتگرال کانولوشن استفاده نماییم:

$$\boxed{U(\omega,y)=F(\omega)e^{-|\omega|y}}\quad,\quad let\quad e^{-|\omega|y}=G(\omega,y)$$

$$\mathfrak{F}^{-1}\left(F(\omega)\right)=f(x)$$

$$\mathfrak{F}^{-1}\left(e^{-|\omega|y}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{y}{x^2+y^2}=g(x,y)$$

$$u(x,y)=\mathfrak{F}^{-1}\left(F(\omega)G(\omega,y)\right)=f(x)\otimes g(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-z)g(z,y)dz$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-z)\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{y}{z^2+y^2}\right)dz$$

$$\to\boxed{u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-z)\frac{y}{z^2+y^2}dz}$$

$$\xrightarrow{or}\boxed{u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\frac{y}{(x-z)^2+y^2}dz}$$

مثال: مطلوبست حل PDE مقابل

$$\begin{cases} u_t - \alpha^2 u_{xx} = 0 \;,\quad x \in [0,\infty)\,,\; t \ge 0 \\ BCs:\;\; u(x,0) = 0\,,\; u(\infty,t) = u_x(\infty,t) = 0 \\ IC:\;\; u(0,t) = A = \text{constant} \end{cases}$$

حل: شرایط برای اعمال تبدیل فوریه سینوسی نامتناهی بر روی متغیر x مهیاست:

$$\mathfrak{F}_s\left(u(x,t)\right) = U(\omega,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\sin(\omega x)\,dx \qquad (x \to \omega)$$

$$\mathfrak{F}_s\left(u_{xx}(x,t)\right) = -\omega^2\mathfrak{F}_c\left(u(x,t)\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega\, u(0,t) = -\omega^2 U(\omega,t) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega A$$

$$\mathfrak{F}_s\left(u_t(x,t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{F}_s\left(u(x,t)\right) = U_t(\omega,t)$$

$$u(x,0) = 0 \to \;\mathfrak{F}_s\left(u(x,0)\right) = U(\omega,0) = 0$$

حال از دوطرف PDE تبدیل فوریه سینوسی نامتناهی می گیریم و از روابط فوق نیز استفاده می نماییم:

$$\mathfrak{F}_s\left(u_t - cu_{xx}\right) = \mathfrak{F}_s(0) = 0 \to U_t(\omega,t) - \alpha^2\left[-\omega^2 U(\omega,t) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega A\right] = 0$$

$$\to U_t(\omega,t) + \alpha^2\omega^2 U(\omega,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha^2 A\,\omega$$

$$\rightarrow \mu(t)=\exp\int \alpha^2\omega^2 dt = e^{\alpha^2\omega^2 t}$$

$$\rightarrow [e^{\alpha^2\omega^2 t}U(\omega,t)]'=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha^2 A\,\omega e^{\alpha^2\omega^2 t} \xrightarrow{\int_0^t dt} e^{\alpha^2\omega^2 t}U(\omega,t)-\underbrace{U(\omega,0)}_{0}=\int_0^t \sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha^2 A\,\omega e^{\alpha^2\omega^2 t}dt$$

$$\rightarrow U(\omega,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}A\,\frac{1-e^{-\alpha^2\omega^2 t}}{\omega}$$

حال از رابطه فوق، تبدیل فوریه سینوسی معکوس می گیریم:

$$u(x,t)=\mathfrak{F}_{\mathfrak{s}}^{-1}\left(U(\omega,t)\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty U(\omega,t)\sin(\omega x)\,d\omega \qquad (\omega\rightarrow x)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}A\,\frac{1-e^{-\alpha^2\omega^2 t}}{\omega}\sin(\omega x)\,d\omega=\frac{2A}{\pi}\int_0^\infty [1-e^{-\alpha^2\omega^2 t}]\frac{\sin(\omega x)}{\omega}d\omega$$

$NOTES:$

1) $erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\beta^2}d\beta \;,\quad erfc(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-\beta^2}d\beta \;,\quad erf(x)+erfc(x)=1$

2) $\int_0^\infty e^{-\beta^2\omega^2}\frac{\sin(\omega x)}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}erf\left(\frac{x}{2\beta}\right) \rightarrow \int_0^\infty e^{-\alpha^2 t\omega^2}\frac{\sin(\omega x)}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}erf\left(\frac{x}{2\alpha\sqrt{t}}\right)$

3) $\int_0^\infty \frac{\sin(\omega x)}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}, \qquad erf(\{0.1,0.5,1,2\})=\{0.11,0.52,0.84,0.995\}$

$$\rightarrow u(x,t)=\frac{2A}{\pi}[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}erf\,(\frac{x}{2\alpha\sqrt{t}})]=A[1-erf\,(\frac{x}{2\alpha\sqrt{t}})]$$

$$\rightarrow \boxed{u(x,t)=A.erfc(\frac{x}{2\alpha\sqrt{t}})}$$

مثال: مطلوبست حل PDE مقابل

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0\ ,\quad x\in(-\infty,\infty)\ ,\ t\geq 0 \\ u(x,0)=f(x)\ ,\quad u_t(x,0)=g(x) \\ u(\pm\infty,t)=u_x(\pm\infty,t)=0 \end{cases}$$

حل: شرایط برای اعمال تبدیل فوریه مختلط نامتناهی بر روی متغیر x مهیاست:

$$\mathfrak{F}\left(u(x,t)\right)=U(\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\,e^{i\omega x}dx \qquad (x\rightarrow\omega)$$

$$\mathfrak{F}\left(u_{xx}(x,t)\right)=(-i\omega)^2\mathfrak{F}\left(u(x,t)\right)=-\omega^2U(\omega,t)$$

$$\mathfrak{F}\left(u_{tt}(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial t^2}\mathfrak{F}\left(u(x,t)\right)=U_{tt}(\omega,t)$$

$$u(x,0)=f(x)\rightarrow\mathfrak{F}\left(u(x,0)\right)=\mathfrak{F}\left(f(x)\right)\rightarrow U(\omega,0)=F(\omega)$$

$$u_t(x,0)=g(x)\rightarrow\mathfrak{F}\left(u_t(x,0)\right)=\mathfrak{F}\left(g(x)\right)\rightarrow U_t(\omega,0)=G(\omega)$$

حال از دوطرف PDE تبدیل فوریه مختلط نامتناهی می گیریم و از روابط قبل نیز استفاده می نماییم:

$$\mathfrak{F}\left(u_{tt}-c^2u_{xx}\right)=\mathfrak{F}\left(0\right)=0\rightarrow U_{tt}+(c\omega)^2U=0$$

$$\rightarrow U(\omega,t)=A(\omega)e^{i\omega ct}+B(\omega)e^{-i\omega ct}$$

$$\left.\begin{array}{l} U(\omega,0)=F(\omega)\rightarrow A(\omega)+B(\omega)=F(\omega) \\ U_t(\omega,0)=G(\omega)\rightarrow i\omega c[A(\omega)-B(\omega)]=G(\omega)\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases} A(\omega)=\frac{1}{2}[F(\omega)+\frac{G(\omega)}{i\omega c}] \\ B(\omega)=\frac{1}{2}[F(\omega)-\frac{G(\omega)}{i\omega c}]\end{cases}$$

$$\rightarrow U(\omega,t)=\frac{1}{2}[F(\omega)+\frac{G(\omega)}{i\omega c}]e^{i\omega ct}+\frac{1}{2}[F(\omega)-\frac{G(\omega)}{i\omega c}]e^{-i\omega ct}$$

در این مرحله باید از رابطه فوق تبدیل فوریه معکوس بگیریم. منتها قبل از آن باید به یک سری نکات توجه نماییم.

$$u(x,t)=\mathfrak{F}^{-1}\left(U(\omega,t)\right)=\mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{1}{2}[F(\omega)+\frac{G(\omega)}{i\omega c}]e^{i\omega ct}+\frac{1}{2}[F(\omega)-\frac{G(\omega)}{i\omega c}]e^{-i\omega ct}\right)$$

$$\text{Property2: }\mathfrak{F}\left(f(x-c)\right)=e^{ic\omega}F(\omega)\rightarrow\mathfrak{F}^{-1}\left(e^{ic\omega}F(\omega)\right)=f(x-c)$$

$$\rightarrow\begin{cases}\mathfrak{F}^{-1}\left(F(\omega)e^{i\omega ct}\right)=f(x-ct) \\ \mathfrak{F}^{-1}\left(F(\omega)e^{-i\omega ct}\right)=f(x+ct)\end{cases}$$

$$\text{Property8:}\quad \mathfrak{F}\left(\hat{u}(x)\right)=\frac{-1}{i\omega\sqrt{2\pi}} \quad\to\quad \mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{1}{i\omega}\right)=-\sqrt{2\pi}\hat{u}(x)$$

$$\text{Property7:}\quad \mathfrak{F}^{-1}\left(F(\omega)G(\omega)\right)=f(x)\otimes g(x)\to\mathfrak{F}^{-1}\left(G(\omega)\frac{1}{i\omega}\right)=-\sqrt{2\pi}g(x)\otimes\hat{u}(x)$$

$$\text{Properties 2,7:}\begin{cases}\mathfrak{F}^{-1}\left(G(\omega)\dfrac{1}{i\omega}e^{i\omega ct}\right)=-\sqrt{2\pi}g(x-ct)\otimes\hat{u}(x-ct)\\ \mathfrak{F}^{-1}\left(G(\omega)\dfrac{1}{i\omega}e^{-i\omega ct}\right)=-\sqrt{2\pi}g(x+ct)\otimes\hat{u}(x+ct)\end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-ct)+f(x+ct)]+\frac{-\sqrt{2\pi}}{2c}.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z=-\infty}^{\infty}g(z)\hat{u}(x-ct-z)\,dz$$
$$-\frac{-\sqrt{2\pi}}{2c}.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z=-\infty}^{\infty}g(z)\hat{u}(x+ct-z)\,dz$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(z)\hat{u}(x-ct-z)\,dz=\int_{-\infty}^{x-ct}g(z)\,dz$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(z)\hat{u}(x+ct-z)\,dz=\int_{-\infty}^{x+ct}g(z)\,dz$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-ct)+f(x+ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(z)\,dz}$$

ریاضیات مهندسی
ویژه دوره کارشناسی مهندسی مکانیک

فصل ششم
معادلات دیفرانسیل پاره ای مرتبه اول
(فصل دوم از کتاب درسی)

مدرس: فرزام دادگر راد
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان

First - OrderPDEs :

Let u(x,y) be the unknown function. The general form of 1st-order PDEs is given by

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

Often the notation $\boxed{p = \frac{\partial u}{\partial x}}$ and $\boxed{q = \frac{\partial u}{\partial y}}$ is used.

EXAMPLE: $p^2 + \sin(up + q) + q^3 + x + \cos y = 0$

Quasi - linear 1st - order PDEs (*linear in p and q*) **:**

$a(x, y, u)p + b(x, y, u)p = c(x, y, u)$

The main focus of this chapter is on Quasi-linear PDEs.

Linear 1st - order PDEs :

$a(x, y)p + b(x, y)p = \underbrace{f(x, y) + \beta u}_{c(x, y, u)}$ *with* $\beta \in \mathbf{R}$

LAGRANGE's method of characteristics to solve QUASI-LINEAR PDEs

Let $\boxed{g(x,y,u)=u(x,y)-u=0}$ where u(x,y)=formula of u in terms of x & y

NOTE that g=0 defines a **surface** in the {x,y,u} space.

This is similar to z=f(x,y) and g(x,y,z)=f(x,y)-z=0 in Calculus II

Calculte the gradient of g at a given point (x,y,u):

$$\nabla g=\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial g}{\partial u}\mathbf{k}=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\mathbf{j}-\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{N}=\nabla g=p\ \mathbf{i}+q\ \mathbf{j}-\mathbf{k}} \Rightarrow \text{unit normal vector to g:}\quad \mathbf{n}=\frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}=\frac{p\ \mathbf{i}+q\ \mathbf{j}-\mathbf{k}}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$$

Now considera curve C lying in the surface g=0 and passing through the same point (x,y,u). If s is a parameter by which the curve is parameterized (e.g., arc-length) then any point on the curve C can be described by the poistion vector r given by

$$\mathbf{r}=\begin{Bmatrix} x(s) \\ y(s) \\ u(s) \end{Bmatrix}=x(s)\mathbf{i}+y(s)\mathbf{j}+u(s)\mathbf{k}$$

Tangent vector to the curve C (recall from calculus II):

$$\mathbf{T}=\lim_{ds\to 0}\frac{\mathbf{r}(s+ds)-\mathbf{r}(s)}{\mathrm{ds}}=\frac{\mathbf{dr}(s)}{\mathrm{ds}}=\frac{\mathrm{d}x\,(s)}{\mathrm{ds}}\mathbf{i}+\frac{\mathrm{d}y\,(s)}{\mathrm{ds}}\mathbf{j}+\frac{\mathrm{d}u\,(s)}{\mathrm{ds}}\mathbf{k}$$

NOTE1: since **T** is tangent to the surface and **N** is perpendicular to it,

it then follows that **N.T**=0

NOTE2: We can rewrite the PDE in the following form

$$\text{ap+bq=c} \Rightarrow \text{ap+bq-c=0} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} . \begin{Bmatrix} b \\ q \\ -1 \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{M.N} = 0$$

where $\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}$ is called the MONGE vector.

$\boxed{\mathbf{M.N} = 0 \rightarrow \mathbf{M} \textbf{ is always tangent to the surface}}$

Now, one may consider another curve C in the surface, whose tangent **T** is in $\pm$**M** direction $\rightarrow$ $\boxed{\mathbf{M} \text{ and } \mathbf{T} \text{ are in the same direction}}$

Now, if **M** and **T** are in the same direction $\Rightarrow$ **T**=k**M** $\Rightarrow \begin{Bmatrix} dx\ /ds \\ dy/ds \\ du\ /ds \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ du \end{Bmatrix} = kds \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}$

$\boxed{\dfrac{dx}{a} = \dfrac{dy}{b} = \dfrac{du}{c}} = kds \quad \Rightarrow$ find two $\boxed{\text{characteristic curves } \phi(x,y,u) = c_1 \text{ and } \psi(x,y,u) = c_2}$

$\Rightarrow$ for any function f, $\boxed{f(\phi,\psi) = 0}$ is the general solution of the PDE.

We will later prove this point as the LAGRANGE's theorem.

NOTE : The method of characteristics can be extended to higher dimensions.

For example, if u=u(x,y,z,t,w), then the quasi-linear PDE is given by

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} + a_3 \frac{\partial u}{\partial z} + a_4 \frac{\partial u}{\partial t} + a_5 \frac{\partial u}{\partial w} = a_6(\mathrm{x,y,z,t,w,u})$$

where $a_i = a_i(\mathrm{x,y,z,t,w,u})$ i=1,2,...,6

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{dz}{a_3} = \frac{dt}{a_4} = \frac{dw}{a_5} = \frac{du}{a_6}} = kds$$

EXAMPLE: find the general solution of $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial u}{\partial y}=u+1$

SOLUTION : $a=x,\quad b=y^2,\quad c=u+1 \Rightarrow \dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y^2}=\dfrac{du}{u+1}$

Step1: Take the first two fractions: $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y^2}\xrightarrow{\text{integrate}}\ln(x)=-\dfrac{1}{y}+c_1$

$$\Rightarrow c_1=\boxed{\phi(x,y,u)=\ln(x)+\frac{1}{y}}$$

Step2: Take $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{du}{u+1}\xrightarrow{\text{integrate}}\ln(u+1)=\ln(x)+\tilde{c}_2=\ln(c_2x)$

with $\tilde{c}_2=\ln(c_2) \Rightarrow u+1=c_2x \Rightarrow \quad c_2=\boxed{\psi(x,y,u)=\dfrac{u+1}{x}}$

for any f : $\quad f(\phi,\psi)=0 \quad \rightarrow \quad f\left(\ln(x)+\dfrac{1}{y},\dfrac{u+1}{x}\right)=0$

$$\rightarrow \frac{u+1}{x}=h\left(\ln(x)+\frac{1}{y}\right) \rightarrow \quad \boxed{u(x,y)=x\ h\left(\ln(x)+\frac{1}{y}\right)-1}$$

NOTE: since f is an arbitrary function, then h is also an arbitrary function of $\phi=\ln(x)+\dfrac{1}{y}$.

NOTE : A key relation $\boxed{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\theta}{\eta} \rightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha+\theta}{\beta+\eta}=\frac{\alpha-\theta}{\beta-\eta}=\frac{\alpha+n\theta}{\beta+n\eta}}$ $\forall n$ (number or function)

EXAMPLE : find the general solution of $x(y-u)p+y(u-x)q=u(x-y)$

SOLUTION : $a=x(y-u),\quad b=y(u-x),\quad c=u(x-y) \Rightarrow$

$$\frac{dx}{x(y-u)}=\frac{dy}{y(u-x)}=\frac{du}{u(x-y)}$$

STEP1: add all fractions in the numerator and denominator:

$$\frac{dx}{x(y-u)}=\frac{dy}{y(u-x)}=\frac{du}{u(x-y)}=\frac{dx+dy+du}{x(y-u)+y(u-x)+u(x-y)=0}=\text{kds}$$

$$\rightarrow \text{d(x+y+u)=0} \xrightarrow{\text{integrate}} x+y+u=c_1 \Rightarrow c_1=\boxed{\phi(x,y,u)=x+y+u}$$

STEP2: rewrite the fractions as $\dfrac{\frac{dx}{x}}{(y-u)}=\dfrac{\frac{dy}{y}}{(u-x)}=\dfrac{\frac{du}{u}}{(x-y)}$

Add the first two fractions in the numerator and denominator:

$$\rightarrow \frac{\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}}{(y-u)+(u-x)=y-x}=\frac{\frac{du}{u}}{(x-y)} \quad \rightarrow \frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=-\frac{du}{u}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{du}{u}=0 \xrightarrow{\text{integrate}} \ln(xyu)=c_2 \Rightarrow \quad c_2=\boxed{\psi(x,y,u)=\ln(xyu)}$$

for any f : $\quad f(\phi,\psi)=0 \quad \rightarrow \boxed{f(x+y+u,\ln(xyu))=0}$

PROOF of Lagrange's Theorem: writen by marker in the classroom!

Cauchy data: Any extra information on the PDE is called as Cauchy data.

EXAMPLE : Solve $xp + y^4 q = xe^u$. The Cauchy data are given by $u=y$ on the line $x=1$

SOLUTION : $a = x,\ \ b = y^4,\ \ c = xe^u \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y^4} = \dfrac{du}{xe^u}$

STEP1: *from* $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y^4} = y^{-4}dy \xrightarrow{\text{integrate}} \ln(x) = \dfrac{1}{-4+1} y^{-4+1} + c_1$

$$\Rightarrow c_1 = \boxed{\phi(x,y,u) = \ln(x) + \frac{1}{3y^3}}$$

STEP1: *from* $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{xe^u} \to dx = e^{-u}du \xrightarrow{\text{integrate}} x = -e^{-u} + c_2$

add all fractions in the numerator and denominator:

$$\Rightarrow c_2 = \boxed{\psi(x,y,u) = x + e^{-u}}$$

for any f : $\quad f(\phi,\psi) = 0 \quad \to \quad \boxed{f(\phi, x + e^{-u}) = 0} \to x + e^{-u} = h(\phi)$

$$\to e^{-u} = h(\phi) - x \to u = -\ln(h(\phi) - x) \to \boxed{u(x,y) = -\ln\left(h\left(\ln(x) + \frac{1}{3y^3}\right) - x\right)}$$

Now consider the **Caucy data**:

Let x=1 and $u = y$ in the previous relation: $\mathrm{y} = -\ln\left(h\left(\ln(x)+\frac{1}{3y^3}\right)-x\right)_{\mathrm{x}=1}$

$$\rightarrow h\left(\frac{1}{3y^3}\right)-1=e^{-y} \rightarrow h\left(\frac{1}{3y^3}\right)=e^{-y}+1$$

$$\rightarrow Let\ z=\frac{1}{3y^3} \rightarrow 3zy^3=1 \rightarrow y=\frac{1}{\sqrt[3]{3z}} \rightarrow \boxed{h(z)=e^{\frac{-1}{\sqrt[3]{3z}}}+1}$$

$$\rightarrow h(\phi)=e^{\frac{-1}{\sqrt[3]{3\phi}}}+1 \rightarrow \boxed{u(x,y)=-\ln\left(e^{\frac{-1}{\sqrt[3]{3\phi}}}+1-x\right) \quad with \quad \phi=\ln(x)+\frac{1}{3y^3}}$$

Fully Nonlinear First-OrderPDEs:

Recall that the general form of a fully nonlinear 1st-order PDE is given by

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

In general, there is **NOT** a systematic method to solve such PDEs

In some special problems, one may use multiplicative or additiove decomposition of u(x,y) to solve the given PDE

Multiplicative or additiove decomposition: u(x,y)=X(x)Y(y)
Additive decomposition: u(x,y)=X(x)+Y(y)

EXAMPLE: Solve $(yp)^m + (xq)^m = (xyu)^m$ for $m = 2$

SOLTION: An expection of the PDE shows that one can use the multiplicative decomposition u(x,y)=X(x)Y(y)

$$\rightarrow p = \frac{\partial u}{\partial x} = X'Y, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y} = XY' \rightarrow (yX'Y)^2 + (xXY')^2 = (xyXY)^2$$

$$\xrightarrow[\text{R.H.S.}]{\text{devide by}} \left(\frac{yX'Y}{xyXY}\right)^2+\left(\frac{xXY'}{xyXY}\right)^2=1\rightarrow \underbrace{\left(\frac{X'}{xX}\right)^2}_{only\ \ x}=1-\underbrace{\left(\frac{Y'}{yY}\right)^2}_{only\ \ y}=\lambda^2\geq 0$$

$$\rightarrow \frac{X'}{xX}=\pm\lambda\rightarrow\frac{dX}{dx}=\pm\lambda xX\ \rightarrow\frac{dX}{X}=\pm\lambda x\,dx$$

$$\ln(X)=\pm\frac{1}{2}\lambda x^2+\tilde{C}_1\rightarrow \boxed{X(x)=C_1\exp\left(\pm\frac{1}{2}\lambda x^2\right)}$$

$$1-\left(\frac{Y'}{yY}\right)^2=\lambda^2\rightarrow Y'=\pm yY\sqrt{1-\lambda^2}\rightarrow\frac{dY}{Y}=\pm\sqrt{1-\lambda^2}\,y\,dy$$

$$\rightarrow Y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-\lambda^2}\,y^2+\tilde{C}_2\rightarrow \boxed{Y(y)=C_2\exp\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-\lambda^2}\,y^2\right)}$$

$$\rightarrow \boxed{u=XY=C\exp\left(\pm\frac{1}{2}\lambda x^2\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-\lambda^2}\,y^2\right)}$$

EXAMPLE: Solve $f(x)p^m + g(y)q^m = u$ for $f = g = 1$ and $m = 2$

SOLTION: An expection of the PDE shows that one can use the additive decomposition u(x,y)=X(x)+Y(y)

$$\rightarrow p=\frac{\partial u}{\partial x}=X', \quad q=\frac{\partial u}{\partial y}=Y' \rightarrow (X')^2+(Y')^2=X+Y$$

$$\rightarrow \boxed{(X')^2-X=Y-(Y')^2=\lambda}$$

$$\rightarrow (X')^2-X=\lambda \rightarrow X'=\pm\sqrt{X+\lambda} \rightarrow \frac{dX}{\sqrt{X+\lambda}}=\pm dx$$

$$\rightarrow let \quad X+\lambda=\beta \rightarrow dX=d\beta \rightarrow \beta^{-1/2}d\beta=\pm dx \rightarrow 2\sqrt{\beta}=2\sqrt{X+\lambda}=\pm x+C_1$$

$$\rightarrow \boxed{X=\frac{1}{4}(\pm x+C_1)^2-\lambda}$$

$$Y-(Y')^2=\lambda \rightarrow Y'=\pm\sqrt{Y-\lambda} \xrightarrow{similarly} \boxed{Y=\frac{1}{4}(\pm y+C_2)^2+\lambda}$$

$$\rightarrow \boxed{u=X+Y=\frac{1}{4}(\pm x+C_1)^2+\frac{1}{4}(\pm y+C_2)^2}$$

ریاضیات مهندسی
ویژه دوره کارشناسی مهندسی مکانیک

فصل هفتم
دسته بندی معادلات دیفرانسیل پاره ای خطی مرتبه دوم دو متغیره
(فصل چهارم از کتاب درسی)

مدرس: فرزام دادگر راد
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان

General Form of Two-Variable Second-Order Linear PDEs:

For u(x,y) as the unknown function, the general form is given by

$$\boxed{\begin{aligned}A(x,y)u_{xx}+B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}+D(x,y)u_{x}\\ +E(x,y)u_{y}+F(x,y)u=G(x,y)\qquad (I)\end{aligned}}$$

Define $\boxed{\Delta = B^2-4AC}$

NOTE: In this chapter, x and y are arbitrary variables, and one may replace each of them by "t" or any other variable.

We seek the new variables (ξ,η), so that the PDE in terms of the new variables takes a simpler form. The transformation between variables is given by

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{x}&=\mathrm{x}(\xi,\eta)\\ \mathrm{y}&=\mathrm{y}(\xi,\eta)\end{aligned}\right\} \xrightarrow{\ if\ \ J\neq 0\ } \begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}$$

Jacobian of Transformation $\quad \mathrm{J}=\left|\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(\xi,\eta)}\right|\neq 0$ (for one-to-one correpondence)

$$u(x,y)=u(\mathrm{x}(\xi,\eta),\mathrm{y}(\xi,\eta))=\bar{\mathrm{u}}(\xi,\eta)\rightarrow \boxed{\underbrace{u(x,y)}_{\substack{u\ in\ terms\ of\\ x\ and\ y}} = \underbrace{\bar{\mathrm{u}}(\xi,\eta)}_{\substack{u\ in\ terms\ of\\ \xi\ and\ \eta}}}$$

Now, we calculate all terms in (I) based on new variables:

$$u_x = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}(\xi,\eta)}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}(\xi,\eta)}{\partial \xi}.\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}(\xi,\eta)}{\partial \eta}.\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\rightarrow \boxed{u_x = \bar{u}_\xi \xi_x + \bar{u}_\eta \eta_x \quad (1)}$$

$$u_y = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}(\xi,\eta)}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}(\xi,\eta)}{\partial \xi}.\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}(\xi,\eta)}{\partial \eta}.\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\rightarrow \boxed{u_y = \bar{u}_\xi \xi_y + \bar{u}_\eta \eta_y \quad (2)}$$

$$u_{xx} \overset{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}_\xi \xi_x + \bar{u}_\eta \eta_x) = (\bar{u}_\xi \xi_{xx} + \bar{u}_\eta \eta_{xx}) + \xi_x \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}_\xi) + \eta_x \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}_\eta)$$

$$= (\bar{u}_\xi \xi_{xx} + \bar{u}_\eta \eta_{xx}) + \xi_x (\bar{u}_{\xi\xi} \xi_x + \bar{u}_{\xi\eta} \eta_x) + \eta_x (\bar{u}_{\xi\eta} \xi_x + \bar{u}_{\eta\eta} \eta_x) \rightarrow$$

$$\boxed{u_{xx} = (\bar{u}_\xi \xi_{xx} + \bar{u}_\eta \eta_{xx}) + (\bar{u}_{\xi\xi} \xi_x^2 + \bar{u}_{\eta\eta} \eta_x^2 + 2\bar{u}_{\xi\eta} \xi_x \eta_x) \quad (3)} \xrightarrow{similarly}$$

$$\boxed{u_{yy} = (\bar{u}_\xi \xi_{yy} + \bar{u}_\eta \eta_{yy}) + (\bar{u}_{\xi\xi} \xi_y^2 + \bar{u}_{\eta\eta} \eta_y^2 + 2\bar{u}_{\xi\eta} \xi_y \eta_y) \quad (4)}$$

$$\boxed{u_{xy} = (\bar{u}_\xi \xi_{xy} + \bar{u}_\eta \eta_{xy}) + \bar{u}_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + \bar{u}_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + \bar{u}_{\xi\eta}(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) \quad (5)}$$

By substituting (1) to (5) into (I) we obtain:

$$\boxed{\begin{aligned}&\bar{A}(\xi,\eta)\bar{u}_{\xi\xi}+\bar{B}(\xi,\eta)\bar{u}_{\xi\eta}+\bar{C}(\xi,\eta)\bar{u}_{\eta\eta}+\bar{D}(\xi,\eta)\bar{u}_{\xi}\\&\qquad+\bar{E}(\xi,\eta)\bar{u}_{\eta}+\bar{F}(\xi,\eta)\bar{u}=\bar{G}(\xi,\eta)\qquad (II)\end{aligned}}$$

where $\bar{A}$ to $\bar{G}$ are as follows:

$$\begin{cases}\boxed{\begin{aligned}&\bar{A}(\xi,\eta)=A\,\xi_x^2+B\,\xi_x\,\xi_y+C\,\xi_y^2\\&\bar{C}(\xi,\eta)=A\,\eta_x^2+B\,\eta_x\,\eta_y+C\,\eta_y^2\end{aligned}}\\ \bar{B}(\xi,\eta)=2(A\,\xi_x\,\eta_x+C\,\xi_y\,\eta_y)+B\,(\xi_x\,\eta_y+\xi_y\,\eta_x)\\ \bar{D}(\xi,\eta)=A\,\xi_{xx}+C\,\xi_{yy}+B\,\xi_{xy}+D\,\xi_x+E\,\xi_y\\ \bar{E}(\xi,\eta)=A\,\eta_{xx}+C\,\eta_{yy}+B\,\eta_{xy}+D\,\eta_x+E\,\eta_y\\ \bar{F}(\xi,\eta)=F\,(\mathrm{x}(\xi,\eta),\mathrm{y}(\xi,\eta))\\ \bar{G}(\xi,\eta)=G\,(\mathrm{x}(\xi,\eta),\mathrm{y}(\xi,\eta))\end{cases}$$

Define $\boxed{\bar{\Delta}=\bar{B}^2-4\bar{A}\,\bar{C}}\rightarrow$ You can easily check that $\boxed{\bar{\Delta}=J^2\Delta}$

$\Rightarrow$ Δ and $\bar{\Delta}$ have the same sign (=0, >0, <0)!

QUESTION: **How to find** (ξ,η)?

ANSWER: We find (ξ,η) by setting $\bar{A}=\bar{C}=0$

$$\text{Let}\quad \bar{A}(\xi,\eta)=A\,\xi_x^2+B\,\xi_x\,\xi_y+C\,\xi_y^2=0 \xrightarrow{\div\,\xi_y^2} A\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2+B\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)+C=0$$

Consider the curve $\xi(x,y)=C$, *then differentiate this relation*

$$d\xi=\frac{\partial\xi}{\partial x}dx+\frac{\partial\xi}{\partial y}dy=0\rightarrow \xi_x\,dx=-\xi_y\,dy\rightarrow \boxed{\frac{\xi_x}{\xi_y}=-\frac{dy}{dx}}$$

$$\rightarrow \boxed{A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-B\,\frac{dy}{dx}+C=0}\rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{B\pm\sqrt{\Delta}}{2A}}\rightarrow \text{find }\ \xi\ \text{ and }\ \eta$$

NOTE : This relation is useful if $A\neq 0$

NOTE : The form of PDE in terms of ξ and η is called the CANONICAL FORM of PDE.

NOTE : Alternative, one may divide both sides of $\bar{A}$ by ξ_x^2, then

$$A+B\left(\frac{\xi_y}{\xi_x}\right)+C\left(\frac{\xi_y}{\xi_x}\right)^2=0 \rightarrow \text{use} \quad \frac{\xi_y}{\xi_x}=-\frac{dx}{dy}$$

$$\rightarrow \boxed{C\left(\frac{dx}{dy}\right)^2-B\frac{dx}{dy}+A=0} \rightarrow \boxed{\frac{dx}{dy}=\frac{B\pm\sqrt{\Delta}}{2C}} \quad (*)$$

NOTE : This relation is useful, in particular when A=0

NOTE : When A=0, as another method, one may interchange the roles of x and y in the given PDE

DEFINITION : Recall that $\Delta = B^2-4AC$

if $\Delta > 0 \rightarrow$ *the PDE is called HYPERPOLIC*

if $\Delta = 0 \rightarrow$ *the PDE is called PARAPOLIC*

if $\Delta < 0 \rightarrow$ *the PDE is called ELLIPTIC*

EXAMPLE : Determine the type of one-dimensional wave equation

$$c^2 u_{xx} - u_{tt} = \{0 \quad or \quad f(x,t)\}$$

SOLUTION : *Notice that "t" plays the role of "y"*

$$A = c^2, \; B = 0, \; C = -1 \rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = 4c^2 > 0 \rightarrow HYPERPOLIC$$

EXAMPLE : Determine the type of one-dimensional conduction equation

$$\alpha^2 u_{xx} - u_t = \{0 \quad or \quad f(x,t)\}$$

SOLUTION : *Notice that "t" plays the role of "y"*

$$A = \alpha^2, \; B = C = 0 \rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = 0 \rightarrow PARABOLIC$$

EXAMPLE : Determine the type of two-dimensional

Laplace or Poisson equation $\nabla^2 u(x,y) = u_{xx} + u_{yy} = \{0 \quad or \quad f(x,y)\}$

SOLUTION : $A = C = 1, \; B = 0 \rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = -1 < 0 \rightarrow ELLIPTIC$

CANONICAL FORM OF HYPERBOLIC PDEs $(\Delta > 0)$:

In this case, the 2nd-order equation $A\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - B\dfrac{dy}{dx} + C = 0$, has two distinct solutions. So, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$ canbe used to obtain ξ and η.

Finally, the CANONICAL form of the PDE is given by $\boxed{\bar{u}_{\xi\eta} = H(\bar{u}_\xi, \bar{u}_\eta, \bar{u}, \xi, \eta)}$

NOTE: Instead of working with ξ and η, one may define

$\alpha = \dfrac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \dfrac{\xi - \eta}{2} \rightarrow$ another expression of the

CANONICAL form is given by $\boxed{\tilde{u}_{\alpha\alpha} - \tilde{u}_{\beta\beta} = H(\tilde{u}_\alpha, \tilde{u}_\beta, \tilde{u}, \alpha, \beta)}$

Note that $u(x, y) = \bar{u}(\xi, \eta) = \tilde{u}(\alpha, \beta)$

EXAMPLE : Obtain the canonical form of

$$4u_{xx}+5u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y=0$$

Solution: $A=4,\ B=5,\ C=1\rightarrow \Delta=B^2-4AC=9>0\rightarrow HYPERPOLIC$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{B\pm\sqrt{\Delta}}{2A}=\frac{5\pm 3}{8}=\left\{1,\frac{1}{4}\right\}$$

$$\rightarrow if\ \frac{dy}{dx}=1\rightarrow dy=dx\xrightarrow{\text{integrate}} y=x+c_1\rightarrow c_1=\boxed{\xi=y-x}$$

$$\rightarrow if\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}\rightarrow 4dy=dx\xrightarrow{\text{integrate}} 4y=x+c_2\rightarrow c_2=\boxed{\eta=4y-x}$$

$$\xi=y-x\rightarrow \xi_x=-1,\quad \xi_y=1$$

$$\eta=4y-x\rightarrow \eta_x=-1,\quad \eta_y=4$$

$$\mathrm{u}_\mathrm{x}=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial\bar{\mathrm{u}}(\xi,\eta)}{\partial x}=\bar{\mathrm{u}}_\xi\xi_x+\bar{\mathrm{u}}_\eta\eta_x=-(\bar{\mathrm{u}}_\xi+\bar{\mathrm{u}}_\eta)$$

$$\mathrm{u}_\mathrm{y}=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\bar{\mathrm{u}}(\xi,\eta)}{\partial y}=\bar{\mathrm{u}}_\xi\xi_y+\bar{\mathrm{u}}_\eta\eta_y=\bar{\mathrm{u}}_\xi+4\bar{\mathrm{u}}_\eta$$

$$u_{xx} = -\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}_{\xi} + \bar{u}_{\eta}) = -(\bar{u}_{\xi\xi}\xi_x + \bar{u}_{\xi\eta}\eta_x) - (\bar{u}_{\xi\eta}\xi_x + \bar{u}_{\eta\eta}\eta_x)$$

$$= \bar{u}_{\xi\xi}\xi_x + 2\bar{u}_{\xi\eta} + \bar{u}_{\eta\eta}$$

$$u_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}_{\xi} + 4\bar{u}_{\eta}) = (\bar{u}_{\xi\xi}\xi_y + \bar{u}_{\xi\eta}\eta_y) + (\bar{u}_{\xi\eta}\xi_y + \bar{u}_{\eta\eta}\eta_y)$$

$$= \bar{u}_{\xi\xi} + 8\bar{u}_{\xi\eta} + 16\bar{u}_{\eta\eta}$$

$$u_{xy} = -\frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}_{\xi} + \bar{u}_{\eta}) = -(\bar{u}_{\xi\xi}\xi_y + \bar{u}_{\xi\eta}\eta_y) - (\bar{u}_{\xi\eta}\xi_y + \bar{u}_{\eta\eta}\eta_y)$$

$$= -(\bar{u}_{\xi\xi} + 5\bar{u}_{\xi\eta} + 4\bar{u}_{\eta\eta})$$

$$\xrightarrow[PDE]{in} \boxed{3\bar{u}_{\xi\eta} = \bar{u}_{\eta}} \to Let\ \bar{u}_{\eta} = V \to 3V_{\xi} - V = 0$$

$$\to \frac{dV}{V} = \frac{1}{3}d\xi \xrightarrow{\text{integrate}} \ln(V) = \frac{1}{3}\xi + \tilde{k}_1(\eta) \to V = k_1(\eta)\exp(\frac{1}{3}\xi) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}$$

$$\xrightarrow{\text{integrate}} \bar{u} = \int k_1(\eta)\exp(\frac{1}{3}\xi)d\eta + k_2(\xi) = \exp(\frac{1}{3}\xi)\int k_1(\eta)d\eta + k_2(\xi)$$

$$\to let\ \int k_1(\eta)d\eta = f(\eta),\quad k_2(\xi) = g(\xi)$$

$$\to \boxed{\bar{u}(\xi,\eta) = \exp(\frac{1}{3}\xi)f(\eta) + g(\xi)}$$

recall that $\xi = y - x\,, \quad \eta = 4y - x \rightarrow$

$$\bar{u}(\xi,\eta) = \exp(\frac{1}{3}\xi)f(\eta) + g(\xi) = \boxed{u(x,y) = \exp(\frac{y-x}{3})f(4y-x) + g(y-x)}$$

CANONICAL FORM OF PARABOLIC PDEs ($\Delta = 0$) :

In this case, the 2nd-order equation $A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\frac{dy}{dx} + C = 0,$

has only one solution, given by $\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A}$, and can be used to obtain ξ (x,y).

Then, any arbitrary function η (x,y) can be chosen for η,

provided that the roots of ξ and η are not the same.

In most cases, choosing η=x or η=y is sufficient. More precisely,

$$\eta = \begin{cases} x & \text{if } \quad x=0 \text{ is not the root of } \xi=0 \\ y & \text{if } \quad y=0 \text{ is not the root of } \xi=0 \end{cases}$$

Finally, the CANONICAL form of the PDE is given by $\boxed{\bar{u}_{\eta\eta} = H(\bar{u}_\xi, \bar{u}_\eta, \bar{u}, \xi, \eta)}$

EXAMPLE : Obtain the canonical form of

$$x^4 u_{xx} + 2x^2 y^2 u_{xy} + y^4 u_{yy} = 0$$

Solution: $A = x^4,\ B = 2x^2 y^2,\ C = y^4 \to \Delta = B^2 - 4AC = 0 \to PARAPOLIC$

$$\to \frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{2x^2 y^2}{2x^4} = \frac{y^2}{x^2} \to \frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2} \xrightarrow{\text{integrate}} -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + c_1$$

$$\to c_1 = \boxed{\xi = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy}} \to \text{ we can choose } \boxed{\eta = x}$$

$$\xi = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \to \xi_x = -\frac{1}{x^2}, \quad \xi_y = \frac{1}{y^2}$$

$$\eta = x \to \eta_x = 1, \quad \eta_y = 0$$

$$\mathrm{u}_{\mathrm{x}} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\mathrm{u}}(\xi,\eta)}{\partial x} = \bar{\mathrm{u}}_\xi \xi_x + \bar{\mathrm{u}}_\eta \eta_x = -\frac{1}{x^2}\bar{\mathrm{u}}_\xi + \bar{\mathrm{u}}_\eta$$

$$\mathrm{u}_{\mathrm{y}} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\mathrm{u}}(\xi,\eta)}{\partial y} = \bar{\mathrm{u}}_\xi \xi_y + \bar{\mathrm{u}}_\eta \eta_y = \frac{1}{y^2}\bar{\mathrm{u}}_\xi$$

$$\mathrm{u}_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{x^{2}}\bar{\mathrm{u}}_{\xi}+\bar{\mathrm{u}}_{\eta}\right)=\frac{2}{x^{3}}\bar{\mathrm{u}}_{\xi}-\frac{1}{x^{2}}(\bar{\mathrm{u}}_{\xi\xi}\xi_{x}+\bar{\mathrm{u}}_{\xi\eta}\eta_{x})+(\bar{\mathrm{u}}_{\xi\eta}\xi_{x}+\bar{\mathrm{u}}_{\eta\eta}\eta_{x})$$

$$=\frac{2}{x^{3}}\bar{\mathrm{u}}_{\xi}+\frac{1}{x^{4}}\bar{\mathrm{u}}_{\xi\xi}+\bar{\mathrm{u}}_{\eta\eta}-\frac{2}{x^{2}}\bar{\mathrm{u}}_{\xi\eta}$$

$$\mathrm{u}_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^{2}}\bar{\mathrm{u}}_{\xi}\right)=\frac{-2}{y^{3}}\bar{\mathrm{u}}_{\xi}+\frac{1}{y^{2}}(\bar{\mathrm{u}}_{\xi\xi}\xi_{y}+\bar{\mathrm{u}}_{\xi\eta}\eta_{y})$$

$$=\frac{-2}{y^{3}}\bar{\mathrm{u}}_{\xi}+\frac{1}{y^{4}}\bar{\mathrm{u}}_{\xi\xi}$$

$$\mathrm{u}_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{x^{2}}\bar{\mathrm{u}}_{\xi}+\bar{\mathrm{u}}_{\eta}\right)=-\frac{1}{x^{2}}(\bar{\mathrm{u}}_{\xi\xi}\xi_{y}+\bar{\mathrm{u}}_{\xi\eta}\eta_{y})+(\bar{\mathrm{u}}_{\xi\eta}\xi_{y}+\bar{\mathrm{u}}_{\eta\eta}\eta_{y})$$

$$=-\frac{1}{x^{2}y^{2}}\bar{\mathrm{u}}_{\xi\xi}+\frac{1}{y^{2}}\bar{\mathrm{u}}_{\xi\eta}$$

$$\xrightarrow[PDE]{in}\boxed{x^{4}\bar{\mathrm{u}}_{\eta\eta}+2(x-y)\bar{\mathrm{u}}_{\xi}=0}$$

$$\eta=x\ \rightarrow\ \xi=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{\eta}-\frac{1}{y}\rightarrow\frac{1}{y}=\frac{1}{\eta}-\xi=\frac{1-\xi\eta}{\eta}\rightarrow y=\frac{\eta}{1-\xi\eta}$$

$$\rightarrow x-y=\eta-\frac{\eta}{1-\xi\eta}=\eta\left(1-\frac{1}{1-\xi\eta}\right)=-\frac{\xi\eta^{2}}{1-\xi\eta}$$

$$\rightarrow \eta^4 \bar{u}_{\eta\eta} - 2\frac{\xi\eta^2}{1-\xi\eta}\bar{u}_\xi = 0 \xrightarrow[\text{form}]{\text{canonical}} \boxed{\bar{u}_{\eta\eta} = 2\frac{\xi\eta^{-2}}{1-\xi\eta}\bar{u}_\xi}$$

CANONICAL FORM OF ELLIPTIC PDEs $(\Delta < 0)$:

In this case, the 2nd-order equation $A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\frac{dy}{dx} + C = 0$, has two complex-conjugate solutions. So, $\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm i\sqrt{-\Delta}}{2A}$ canbe used to obtain ξ and η. However, ξ and η are complex functions.

Instead of working with the complex functions ξ and η, we define

$\alpha = \frac{\xi+\eta}{2}$, $\beta = \frac{\xi-\eta}{2i}$ $\left(or \quad \beta = \frac{\eta-\xi}{2i}\right)$ which are real functions.

Then the CANONICAL form is given by

$$\boxed{\tilde{u}_{\alpha\alpha} + \tilde{u}_{\beta\beta} = H(\tilde{u}_\alpha, \tilde{u}_\beta, \tilde{u}, \alpha, \beta)}$$

Note that $u(x,y) = \bar{u}(\xi,\eta) = \tilde{u}(\alpha,\beta)$

EXAMPLE : Obtain the canonical form of $u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$ (assume $x > 0$)

Solution: $A = 1,\ B = 0,\ C = x^2 \rightarrow \Delta = -4x^2 < 0 \rightarrow ELLIPTIC$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{\pm\sqrt{-4x^2}}{2} = \pm ix$$

$$\rightarrow if \quad dy = ix\,dx \xrightarrow{\text{integrate}} y = \frac{1}{2}ix^2 + c_1 \rightarrow c_1 = \boxed{\xi = y - \frac{1}{2}ix^2}$$

$$\rightarrow if \quad dy = -ix\,dx \xrightarrow{\text{integrate}} y = -\frac{1}{2}ix^2 + c_2 \rightarrow c_2 = \boxed{\eta = y + \frac{1}{2}ix^2}$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\xi + \eta}{2} = y\,, \quad \beta = \frac{\eta - \xi}{2i} = \frac{1}{2}x^2}$$

$$\alpha = y \rightarrow \alpha_x = 0, \quad \alpha_y = 1$$

$$\beta = \frac{1}{2}x^2 \rightarrow \beta_x = x\,, \quad \beta_y = 0$$

$$u_x = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}(\alpha,\beta)}{\partial x} = \tilde{u}_\alpha \alpha_x + \tilde{u}_\beta \beta_x = x\tilde{u}_\beta$$

$$u_y = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{u}(\alpha,\beta)}{\partial y} = \tilde{u}_\alpha \alpha_y + \tilde{u}_\beta \beta_y = \tilde{u}_\alpha$$

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(x\tilde{u}_{\beta}) = \tilde{u}_{\beta} + x(\tilde{u}_{\alpha\beta}\alpha_x + \tilde{u}_{\beta\beta}\beta_x) = \tilde{u}_{\beta} + x^2\tilde{u}_{\beta\beta}$$

$$u_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(\tilde{u}_{\alpha}) = \tilde{u}_{\alpha\alpha}\alpha_y + \tilde{u}_{\alpha\beta}\beta_y = \tilde{u}_{\alpha\alpha}$$

$$\xrightarrow[PDE]{in} \boxed{x^2(\tilde{u}_{\alpha\alpha} + \tilde{u}_{\beta\beta}) + \tilde{u}_{\beta} = 0}$$

$$\beta = \frac{1}{2}x^2 \rightarrow x^2 = 2\beta \xrightarrow[form]{canonical} \boxed{\tilde{u}_{\alpha\alpha} + \tilde{u}_{\beta\beta} = \frac{-1}{2\beta}\tilde{u}_{\beta}}$$

EXAMPLE : Determine the canonicalform of the one-dimensional wave equation, and then solve it for the given initial conditions

$$\begin{cases} c^2u_{xx} - u_{tt} = 0, & x \in (-\infty, \infty), \quad t \in [0, \infty) \\ ICs: \ u(x,0) = f(x), \ u_t(x,0) = g(x) \\ BCs: \ u(\pm\infty, t) = 0, \quad u_x(\pm\infty, t) = 0 \end{cases}$$

SOLUTION : Notice that "t" plays the role of "y"

$$A = c^2, \ B = 0, \ C = -1 \rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = 4c^2 > 0 \rightarrow HYPERPOLIC$$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{B\pm\sqrt{\Delta}}{2A}=\frac{\pm\sqrt{4c^2}}{2c^2}=\pm\frac{1}{c}\rightarrow dx=\pm c\,dt$$

$$\rightarrow if\ \ dx=+c\,dt\xrightarrow{\text{integrate}}x=ct+C_1\rightarrow C_1=\boxed{\xi=x-ct}$$

$$\rightarrow if\ \ dx=-c\,dt\xrightarrow{\text{integrate}}x=-ct+C_2\rightarrow C_2=\boxed{\eta=x+ct}$$

$$\xi=x-ct\rightarrow\xi_x=1,\quad\xi_t=-c$$

$$\eta=x+ct\rightarrow\eta_x=1,\quad\eta_t=c$$

$$\mathrm{u}_x=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial\bar{\mathrm{u}}(\xi,\eta)}{\partial x}=\bar{\mathrm{u}}_\xi\xi_x+\bar{\mathrm{u}}_\eta\eta_x=\bar{\mathrm{u}}_\xi+\bar{\mathrm{u}}_\eta$$

$$\mathrm{u}_t=\frac{\partial u(x,y)}{\partial t}=\frac{\partial\bar{\mathrm{u}}(\xi,\eta)}{\partial t}=\bar{\mathrm{u}}_\xi\xi_t+\bar{\mathrm{u}}_\eta\eta_t=c(-\bar{\mathrm{u}}_\xi+\bar{\mathrm{u}}_\eta)$$

$$\mathrm{u}_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\mathrm{u}}_\xi+\bar{\mathrm{u}}_\eta)=\bar{\mathrm{u}}_{\xi\xi}+2\bar{\mathrm{u}}_{\xi\eta}+\bar{\mathrm{u}}_{\eta\eta}$$

$$\mathrm{u}_{tt}=\mathrm{c}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\mathrm{u}}_\eta-\bar{\mathrm{u}}_\xi)=c^2(\bar{\mathrm{u}}_{\xi\xi}-2\bar{\mathrm{u}}_{\xi\eta}+\bar{\mathrm{u}}_{\eta\eta})$$

$$\xrightarrow[canonical\ form]{in\ \ PDE}\boxed{\bar{\mathrm{u}}_{\xi\eta}=0}$$

$$\bar{u}_{\xi\eta} = \frac{\partial}{\partial \xi}(\bar{u}_\eta) = 0 \xrightarrow[over\ \ \xi]{\text{integrate}} \bar{u}_\eta = k_1(\eta)$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta}\bar{u} = k_1(\eta) \xrightarrow[over\ \ \eta]{\text{integrate}} \bar{u}(\xi,\eta) = \int k_1(\eta)d\eta + k_2(\xi)$$

$$\rightarrow let \ \int k_1(\eta)d\eta = M(\eta), \quad k_2(\xi) = N(\xi)$$

$$\xrightarrow[solution]{general} \boxed{\bar{u}(\xi,\eta) = M(\eta) + N(\xi) = u(x,t) = M(x+ct) + N(x-ct)}$$

In the next step, we apply the given initial conditions

$$u(x,0) = f(x) \rightarrow \boxed{M(x) + N(x) = f(x)} \quad (I)$$

$$u_t(x,0) = \left.\frac{\partial M(x+ct)}{\partial t}\right|_{t=0} + \left.\frac{\partial N(x-ct)}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$$

$$\rightarrow M'(x) - N'(x) = \frac{d}{dx}[M(x) - N(x)] = \frac{1}{c}g(x) \xrightarrow[\text{from 0 to x}]{\text{integrate}}$$

$$M(x) - N(x) - [M(0) - N(0)] = \frac{1}{c}\int_0^x g(z)dz \xrightarrow[Q=M(0)-N(0)]{let}$$

$$\rightarrow \boxed{M(x) - N(x) = \frac{1}{c}\int_0^x g(z)dz + Q} \qquad (II)$$

$\rightarrow$ from (I) and(II) we obtain

$$M(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + \frac{1}{c}\int_0^x g(z)dz + Q\right]$$

$$\rightarrow M(x+ct) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + \frac{1}{c}\int_0^{x+ct} g(z)dz + Q\right]$$

$$N(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) - \frac{1}{c}\int_0^x g(z)dz - Q\right]$$

$$\rightarrow N(x-ct) = \frac{1}{2}\left[f(x-ct) - \frac{1}{c}\int_0^{x-ct} g(z)dz - Q\right]$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} u(x,t) &= M(x+ct) + N(x-ct) \\ &= \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(z)dz\right] \end{aligned}}$$

this is the **D'Alembert solution** for wave equation.

QUESTION : CAN WE ALWAYS USE THE METHODS OF SEPARATION OF VARIABLES TO SOLVE A PDE DEFINED ON A FINITE REGION?

ANSWER: **NO**. Notice that

1) The PDE must be linear
2) If the coefficients of the linear PDE are constant real numbers, then the method is always applicable. Although, it may be too hard to solve the resulting Sturm-Liouville problem!
3) It is possible to have non-constant coefficients, however the cofficnets of mixed deriravetives must be separable. Moreover, if u(x,y) is unknown, then the coefficient of u(x,y) must be of the form $F(x)+G(y)$.

EXAMPLE: The following PDE can be solved by separation of variables:

$$A(x)u_{xx}+\mathrm{B}_1(\mathrm{x})\mathrm{B}_2(\mathrm{y})u_{xy}+C(y)u_{yy}+D(x)u_x+E(y)u_y+[F(x)+G(y)]u=0$$

Notice that $\mathrm{B}=\mathrm{B}_1(\mathrm{x})\mathrm{B}_2(\mathrm{y})$ is a separable function.

ریاضیات مهندسی
ویژه دوره کارشناسی مهندسی مکانیک

فصل هشتم (قسمت دوم درس)
مقدمه ای بر توابع مختلط

کتاب درسی

Complex Variables and Applications,
by Brown & Churchill, 7th edition, 2002

مدرس: فرزام دادگر راد
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان

COMPLEX NUMBERS IN CARTESIAN COORDINATE SYSTEM

-A complex number z is defined by $\boxed{z=x+iy}$ in $\mathbf{R}^2$

-Real and Imaginary parts of z: $\mathrm{Re}(z)=x, \quad \mathrm{Im}(z)=y$

-Modulus or absolute value or length of z: $\boxed{r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}}$

- Note that $x=\mathrm{Re}(z)\le|z|, \quad y=\mathrm{Im}(z)\le|z|$

-The main characteristic of complex numbers is the property $\boxed{i^2=-1}$

Accordingly, if $z_1=x_1+iy_1$ and $z_2=x_2+iy_2$ then

$$\boxed{z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)}$$

-Conjugate of the complex number z: $\boxed{\overline{z}=x-iy}\,\boxed{\overline{\overline{z}}=z}$

$$\rightarrow x=\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\overline{z}), \quad y=\mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})$$

$$\rightarrow \boxed{z\overline{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=|z|^2} \rightarrow \boxed{r=|z|=\sqrt{z\overline{z}}}$$

$$NOTE: \quad z^{-1}=\frac{1}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$\boxed{\textbf{Euler's formula:}\quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

$\rightarrow e^{i\theta}$ is a complex number z with $\mathrm{Re}(z)=\cos\theta$ and $\mathrm{Im}(z)=\sin\theta$

$\rightarrow$ Let $z=e^{i\theta} \rightarrow |z|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$

$$\boxed{\textbf{de Moivre's formula:}\quad (e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

COMPLEX NUMBERS IN POLAR COORDINATE SYSTEM

Let be θ the angle that z makes with x-axis.

The angle θ is called the ARGUMENT of z: $\boxed{\theta=\arg(z)}$

From $x = r\cos\theta$ and $y=r\sin\theta \rightarrow \begin{cases} z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta} \\ \bar{z}=x-iy=r(\cos\theta-i\sin\theta)=re^{-i\theta} \end{cases}$

$\rightarrow \boxed{z=re^{i\theta}}\ \boxed{\bar{z}=re^{-i\theta}} \rightarrow z\bar{z} = (re^{i\theta})(re^{-i\theta}) = r^2 = |z|^2$ (as before)

Principal Argument of z : $\Theta=\text{Arg}(z)$

The argument θ in $z=e^{i\theta}$ is NOT unique and can be replaced by $\theta+2k\pi$

Principal argument of z is the angle Θ that takes a value in $[0,\pi]$ or $(0,-\pi)$

If z is located in the 1st or 2nd quadrant $\rightarrow \Theta \in [0,\pi]$

If z is located in the 3rd or 4th quadrant $\rightarrow \Theta \in (0,-\pi)$

$$\text{EXAMPLE:}\begin{cases}\text{if } z=1+i \;\; (\text{1st quadrant}) \rightarrow \Theta=\pi/4 \\ \text{if } z=-1+i \;\; (\text{2nd quadrant}) \rightarrow \Theta=3\pi/4 \\ \text{if } z=-1-i \;\; (\text{3rd quadrant}) \rightarrow \Theta=-3\pi/4 \\ \text{if } z=1-i \;\; (\text{4th quadrant}) \rightarrow \Theta=-\pi/4\end{cases}$$

Principal Value of a complex number w : is defined as the value of w obtained based on the value of principal arguments in the relation of w.

EXAMPLE: Obtain the principal value of $w=i^i$

Solution: we write $w=z^i$ with $z=i=x+iy=re^{i\Theta}$

$$\rightarrow x=0,\;\; y=1,\;\; r=\sqrt{x^2+y^2}=1,\;\; \text{Arg}(z)=\Theta=\pi/2 \rightarrow z=e^{i\pi/2}$$

$$\rightarrow w=z^i=(e^{i\pi/2})^i=e^{i^2\pi/2}=e^{-\pi/2}$$

Some Properties of Complex Numbers:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad , \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1 \quad , \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$|z| = |\bar{z}| = r \quad , \quad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2^{-1}$$

Triangle Inequality $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

Proof:

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$$

$$= z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2)$$

$$\le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||\bar{z}_2|$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$$

Complex function : w=f(z)

Example: $w=f(z)=z^2=(x+iy)(x+iy)=\underbrace{x^2-y^2}_{u(x,y)}+i\,\underbrace{2xy}_{v(x,y)}$

$\rightarrow$ $\boxed{w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)}$, $u(x,y)=\mathrm{Re}(f(z))=\mathrm{Re}(w)$, $v(x,y)=\mathrm{Im}(f(z))=\mathrm{Im}(w)$

Complex trigonometric and hyperbolic functions :

$$\cosh x=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)\xrightarrow[\text{similarly}]{\text{define}}\cosh z=\frac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right)=\cosh(-z)$$

$$\sinh x=\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)\xrightarrow[\text{similarly}]{\text{define}}\sinh z=\frac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right)=-\sinh(-z)$$

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}\xrightarrow[\text{similarly}]{\text{define}}\tanh z=\frac{\sinh z}{\cosh z}=-\tanh(-z)$$

$$\coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}\xrightarrow[\text{similarly}]{\text{define}}\coth z=\frac{\cosh z}{\sinh z}=-\coth(-z)$$

$$\text{if } z=iy\rightarrow\cosh(iy)=\frac{1}{2}\left(e^{iy}+e^{-iy}\right)=\frac{1}{2}(\cos y+i\sin y+\cos y-i\sin y)=\cos y$$

$$\text{if } z=iy\rightarrow\sinh(iy)=\frac{1}{2}\left(e^{iy}-e^{-iy}\right)=\frac{1}{2}(\cos y+i\sin y-\cos y+i\sin y)=i\sin y$$

$$Let \quad y = is \to \cosh(i \times is) = \cos(is) \to \cosh(-s) = \cosh s = \cos(is)$$

$$Let \quad y = is \to \sinh(i \times is) = i \sin(is) \to \sinh(-s) = -\sinh(s) = i \sin(is)$$

$$\to \boxed{\begin{array}{ll} \cosh(ix) = \cos(x), & \cos(ix) = \cosh x \\ \sinh(ix) = i \sin(x), & \sin(ix) = i \sinh x \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \cosh z &= \frac{1}{2}\left(e^{x+iy} + e^{-x-iy}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{x}(\cos y + i \sin y) + e^{-x}(\cos y - i \sin y)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\cos y\,(e^{x} + e^{-x}) + i \sin y\,(e^{x} - e^{-x})\right] \end{aligned}$$

$$\to \boxed{\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y}$$

$Alternatively:$

$$\begin{aligned} \cosh z &= \cosh(x + iy) = \cosh[x + (iy)] \\ &= \cosh x \cosh(iy) + \sinh x \sinh(iy) \\ &= \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y \end{aligned}$$

$$\sinh z = \frac{1}{2}\left(e^{x+iy} - e^{-x-iy}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{x}(\cos y + i\sin y) - e^{-x}(\cos y - i\sin y)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos y\,(e^{x} - e^{-x}) + i\sin y\,(e^{x} + e^{-x})\right]$$

$$\rightarrow \boxed{\sinh z = \sinh x\,\cos y + i\,\cosh x\,\sin y}$$

Alternatively :

$$\sinh z = \sinh(x+iy) = \sinh[x+(iy)]$$

$$= \sinh x\,\cosh(iy) + \cosh x\,\sinh(iy)$$

$$= \sinh x\,\cos y + i\,\cosh x\,\sin y$$

Similarly :

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin[x+(iy)] = \sin x\,\cos(iy) + \cos x\,\sin(iy)$$

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos[x+(iy)] = \cos x\,\cos(iy) - \sin x\,\sin(iy)$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \sin z = \sin x\,\cosh y + i\,\cos x\,\sinh y \\ \cos z = \cos x\,\cosh y - i\,\sin x\,\sinh y \end{array}}$$

EXAMPLE : Find the values of x and y so that sin z=50

SOLUTION: $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = 50$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x \cosh y = 50 \quad (1) \\ \cos x \sinh y = 0 \rightarrow \cos x = 0 \quad or \quad \sinh y = 0 \end{cases}$$

$$if \quad \sinh y = 0 \rightarrow y = 0 \xrightarrow[in\ (1)]{\cosh y = 1} \sin x = 50 \quad (not\ acceptable)$$

$$if \quad \cos x = 0 \rightarrow x = 2k\pi \pm \pi/2 \ \ with \ \ k \in \mathbf{Z}$$

$$if \quad x = 2k\pi - \pi/2 \xrightarrow[in\ (1)]{\sin x = -1} \cosh y = -50 \quad (not\ acceptable)$$

$$\boxed{if \quad x = 2k\pi + \pi/2 \xrightarrow[in\ (1)]{\sin x = 1} \cosh y = 50 \rightarrow \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y}) = 50 \quad \text{(acceptable)}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}(e^{y} + \frac{1}{e^{y}}) = 50 \rightarrow e^{2y} - 100e^{y} + 1 = 0 \rightarrow Let\ Y = e^{y}$$

$$\rightarrow Y^{2} - 100Y + 1 = 0 \rightarrow Y = e^{y} = 50 \pm \sqrt{50^{2} - 1} = 50 \pm \sqrt{2499}$$

$$\rightarrow \text{two sets of solutions} \begin{cases} 1) \ \ x = 2k\pi + \pi/2, \ \ y = \ln(50 + \sqrt{2499}) \\ 2) \ \ x = 2k\pi + \pi/2, \ \ y = \ln(50 - \sqrt{2499}) \end{cases}$$

Limit of a complex function at z_0 is written as $\lim_{z \to z_0} f(z)$

If the limit exists and is equal to $f(z_0)$, then we say that f(z) is continuous at z_0.

ε - δ definition of limit : we say $\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha$ if and only of

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0,$ so that if $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - \alpha| < \varepsilon$

Derivative of a complex function at z is defined as

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y \Rightarrow \boxed{if \;\; \Delta z \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0 \;,\;\; \Delta y \to 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta x + i\,\Delta y}}$$

$$NOTE: \quad w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$\Rightarrow w + \Delta w = f(z + \Delta z) = f(x + \Delta x + iy + i\,\Delta y)$$

$$= u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

Cauchy - Riemann theorem on derivative of f(z) at a given point z in Cartesian coordinate system :

Let w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y). If the first partial derivatives of u and v (i.e, u_x, v_x, u_y, v_y) exist and are continuous at z, and also the conditions $\boxed{u_x = v_y}$ and $\boxed{u_y = -v_x}$ (known as Cauchy-Riemann conditions) hold, then $f\,'(z)$ exists and is given by $\boxed{f\,'(z)=u_x+iv_x = v_y-iu_y}$.

In this case, we say that f is ANALYTICAL at z.

If f is analytical for all $z \in \mathbf{R}^2$, then it is called an ENTIRE function.

PROOF : It is possible to calculate $f\,'(z)$ by the two formula given below:

$$f\,'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)] + i[v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)]}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)] + i[v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)]}{\Delta x + i\Delta y}$$

Step1: first apply $\Delta y \to 0$ and then $\Delta x \to 0$

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y) - u(x,y)] + i[v(x+\Delta x, y) - v(x,y)]}{\Delta x}$$

$$= u_x + iv_x \quad (I)$$

Step2: first apply $\Delta x \to 0$ and then $\Delta y \to 0$

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[u(x, y+\Delta y) - u(x,y)] + i[v(x, y+\Delta y) - v(x,y)]}{i\Delta y}$$

$$= -iu_y + v_y \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)=(II)} f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y \xrightarrow[Riemann]{Cauchy-} \begin{cases} u_x = v_y & (CR1) \\ u_y = -v_x & (CR2) \end{cases}$$

EXAMPLE: Investigate the differentiability of $w = f(z) = z = x + iy$

SOLUTION: $u(x,y) = x, \quad v(x,y) = y$

$\Rightarrow u_x = v_y = 1, u_y = -v_x = 0 \Rightarrow f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 1$

$\Rightarrow f(z) = z$ is an entire function and $f'(z) = 1$ every where.

EXAMPLE : Investigate the differentiability of $w = f(z) = \bar{z} = x - iy$

SOLUTION: $u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y$

$\Rightarrow u_x = 1, \quad v_y = -1, u_y = -v_x = 0 \Rightarrow$ CR1 does not hold

$\Rightarrow f(z) = \bar{z}$ is NOT analytical at any point.

EXAMPLE : Investigate the differentiability of $w = f(z) = x^2 + y^2$

SOLUTION: $u(x, y) = x^2 + y^2, \quad v(x, y) = 0$

$\Rightarrow u_x = 2x, \quad u_y = 2y, \quad v_x = v_y = 0 \Rightarrow$ CR1 andCR2 hold only if x=y=0

$\Rightarrow f(z) = x^2 + y^2$ is analytical only at 0 and $f'(0) = 0$.

EXAMPLE : Investigate the differentiability of $w = f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

SOLUTION: $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = 0$

$\Rightarrow u_x = x / \sqrt{x^2 + y^2}, \quad u_y = y / \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v_x = v_y = 0$

$\Rightarrow$ From the derivatives, the only point to be considered is (x,y)=(0,0)

But u_x and u_y are not defined at (x,y)=(0,0) $\Rightarrow$ CR1 and CR2 do not hold at $z = 0$

$\Rightarrow f(z) = |z|$ is *NOT* analytical at any point.

NOTE : If a function f isexpressed only in trems of z (but not |z| and $\bar{z}$),

then the traditional rules of differentiation are applicable.

SIMPLE EXAMPLES:

$$f(z)=z^n \Rightarrow f'(z) = nz^{n-1}$$

$$f(z)=\sin z \Rightarrow f'(z) = \cos z$$

$$f(z)=\cos z \Rightarrow f'(z) = -\sin z$$

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

Differentiation in Polar Coordinate system & Polar version of Cauchy - Riemann conditions

$$x(r,\theta) = r\cos\theta, \quad y(r,\theta) = r\sin\theta,$$

$$r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta}$$

$$\tan\theta(x,y)=\frac{y}{x}\xrightarrow[w.r.t.x]{diff}\frac{\partial\theta}{\partial x}\left(1+\tan^2\theta\right)=-\frac{y}{x^2}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\cos^2\theta=-\frac{r\sin\theta}{(r\cos\theta)^2}\cos^2\theta\Rightarrow\boxed{\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{-\sin\theta}{r}}$$

$$\tan\theta(x,y)=\frac{y}{x}\xrightarrow[w.r.t.y]{diff}\frac{\partial\theta}{\partial y}\left(1+\tan^2\theta\right)=\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{1}{x}\cos^2\theta=\frac{1}{r\cos\theta}\cos^2\theta\Rightarrow\boxed{\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\cos\theta}{r}}$$

RECALL that $f'(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_y$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}=u_r\cos\theta-\frac{1}{r}u_\theta\sin\theta$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}=u_r\sin\theta+\frac{1}{r}u_\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow f'(z)=u_x+iv_x=(u_r\cos\theta-\frac{1}{r}u_\theta\sin\theta)+i(v_r\cos\theta-\frac{1}{r}v_\theta\sin\theta)$$

$$=v_y-iu_x=(v_r\sin\theta+\frac{1}{r}v_\theta\cos\theta)-i(u_r\sin\theta+\frac{1}{r}u_\theta\cos\theta)$$

$$\xrightarrow[\text{real parts}]{\text{compare}} u_r \cos\theta - \frac{1}{r}u_\theta \sin\theta = v_r \sin\theta + \frac{1}{r}v_\theta \cos\theta$$

$$\Rightarrow (u_r - \frac{1}{r}v_\theta)\cos\theta - (\frac{1}{r}u_\theta + v_r)\sin\theta = 0 \quad (\textit{for all } \theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{u_r = \frac{1}{r}v_\theta \qquad (CR1)}, \boxed{v_r = -\frac{1}{r}u_\theta \qquad (CR2)}$$

Cauchy − Riemann conditions in polar coordinates

NOTE: comparing the imaginary parts gives the same result.

$$\Rightarrow f\,'(\mathrm{z}) = \mathrm{u_x} + \mathrm{iv_x} = (u_r \cos\theta - \frac{1}{r}u_\theta \sin\theta) + i(v_r \cos\theta - \frac{1}{r}v_\theta \sin\theta)$$

$$= (u_r \cos\theta + v_r \sin\theta) + i(v_r \cos\theta - u_r \sin\theta)$$

$$= u_r(\cos\theta - i\sin\theta) + iv_r(\cos\theta - i\sin\theta) \Rightarrow \boxed{f\,'(\mathrm{z}) = (u_r + iv_r)e^{-i\theta}}$$

$$\Rightarrow f\,'(\mathrm{z}) = \mathrm{u_x} + \mathrm{iv_x} = (u_r \cos\theta - \frac{1}{r}u_\theta \sin\theta) + i(v_r \cos\theta - \frac{1}{r}v_\theta \sin\theta)$$

$$= (\frac{1}{r}v_\theta \cos\theta - \frac{1}{r}u_\theta \sin\theta) + i(-\frac{1}{r}u_\theta \cos\theta - \frac{1}{r}v_\theta \sin\theta)$$

$$= \frac{1}{r}v_\theta(\cos\theta - i\sin\theta) - i\frac{1}{r}u_\theta(\cos\theta - i\sin\theta) \Rightarrow \boxed{f\,'(\mathrm{z}) = \frac{1}{r}(v_\theta - iu_\theta)e^{-i\theta}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} f\,'(z) &= u_x + iv_x = v_y - iu_y \qquad \text{(Cartiesian)} \\ &= (u_r + iv_r)e^{-i\theta} = \frac{1}{r}(v_\theta - iu_\theta)e^{-i\theta} \qquad \text{(Polar)} \end{aligned}}$$

EXAMPLE: If $w=f(z)=z^5$ then calculate $f\,'(z)$.

Solution: $f(z) = z^5 = (re^{i\theta})^5 = r^5 e^{i5\theta} = \underbrace{r^5 \cos 5\theta}_{u(r,\theta)} + i\, \underbrace{r^5 \sin 5\theta}_{v(r,\theta)}$

$$\Rightarrow u_r = 5r^4 \cos 5\theta, \quad v_r = 5r^4 \sin 5\theta$$

$$\Rightarrow f\,'(z) = (u_r + iv_r)e^{-i\theta} = 5r^4(\cos 5\theta + i \sin 5\theta)e^{-i\theta}$$

$$= 5r^4 e^{i5\theta} e^{-i\theta} = 5r^4 e^{i4\theta} = 5(re^{i\theta})^4 = 5z^4$$

Harmonic Conjugate functions

Consider the function $w=f(z)=u+iv$. Assume that u and v satisfy the Cauchy-Riemann conditions.

$$\begin{cases} u_x = v_y \xrightarrow{dif\ x} u_{xx} = v_{xy} \\ u_y = -v_x \xrightarrow{dif\ y} u_{yy} = -v_{xy} \end{cases} \xrightarrow{add} u_{xx} + u_{yy} = \nabla^2 u = 0$$

$$\begin{cases} u_x = v_y \xrightarrow{dif\ y} u_{xy} = v_{yy} \\ u_y = -v_x \xrightarrow{dif\ x} u_{xy} = -v_{xx} \end{cases} \xrightarrow{subtract} v_{xx} + v_{yy} = \nabla^2 v = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0 \rightarrow \text{ u(x,y) and v(x,y) are HARMONIC functions}}$$

It is also said that u and v are **harmonic conjugate** of each other.

NOTE: Sometimes, we have a function of the form f(z)=u, namely v=0.

It is possible to find a function v, so that the new function $\tilde{f}(z)=u+iv$

is analytical at the points where u and v satisfy the differentiability conditions.

In this case, we say that we have found the harmonic conjugate of u.

Similar arguments hold for f(z)=iv.

EXAMPLE: If $w = f(z) = u(x,y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2$, then find the harmonic conjugate of u.

SOLUTION: We use CR1 and CR2 to find v(x,y)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=4x^3-12xy^2 \xrightarrow{\text{int } y} v(x,y)=4x^3y-4xy^3+C_1(x) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=-4y^3+12x^2y \xrightarrow{\text{int } x} v(x,y)=-4xy^3+4x^3y+C_2(y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow v(x,y)=4x^3y-4xy^3+C \quad \text{or simply} \quad v(x,y)=4x^3y-4xy^3$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(z)=u+iv=x^4+y^4-6x^2y^2+i\,4xy(x^2-y^2)$$

Note that $\tilde{f}(z)$ is an entire function in this specific example!

Elementary Functions or Mappings

Often the functions $f(z)=\{az+b,\ \dfrac{1}{z},\ z^n,\ \exp(z),\ \sin z,\ \dfrac{az+b}{cz+d}\}$ are called elementary functions or elemantry mappings. Notice that we can add many other functions to the list. In this course, we focus only on the functions given in the list.

Basically, when we write w=f(z), then w is the image of z under the maping f.

In the sequel, we investigate the image of z under the mappings or functions f(z) listed above.

The function or mapping w = f(z) = z + b

Definitely, w is obtained by adding the vector-like complex number b to the vector-like complex number z. So, a domain D is translated by the amount of b in $\mathbf{R}^2$. Finally, the mapping f(z)=z+b behaves like a rigid body translation (from mechanical point of view) in $\mathbf{R}^2$.

NOTE: we said in the classroom that complex numbers are not vectors. However, they posses severeral properties of vectors, in particular when addition and substraction operations are concerned.

Definition : Conformal Mapping (angle-preserving mapping)

Is a mapping that does *NOT* makes any change between the angles. It preserves the angle between any two line elements before and after application of the mapping. Definitely, the mapping w=z+a is a conformal mapping.

The function or mapping w = f(z) = az

Write $z=r_1e^{i\theta_1}$ and $a=r_2e^{i\theta_2} \Rightarrow w = az = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} |w| = r_1r_2 = |a||z| \quad (\textit{magnification by } |a|) \\ \arg(w) = \theta_1+\theta_2 = \arg(z)+\arg(a) \quad (\textit{rigid rotation by } \theta_2) \end{cases}$$

So, the mapping f(z)=az contains both **magnification** and **rotation** operations.

The value of z is multiplied by $r_2=|a|$, and it is rotated by the angle θ_2.

If $|a|>1 \Rightarrow$ expansion & If $|a|<1 \Rightarrow$ contraction

The function or mapping w = f(z) = az + b

According to the previous two cases, az+b contains magnification+rotation+translation in itself.

NOTE: The mapping w=f(z)=az+b is a conformal mapping.

The function or mapping $\mathbf{w = f(z) = \frac{1}{z}}$

$$w=u+iv=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}\Rightarrow\begin{cases}u=\dfrac{x}{x^2+y^2}\\[2ex] v=\dfrac{-y}{x^2+y^2}\end{cases}$$

EXAMPLE: Find the image of the circle $x^2+y^2=R^2$ under $f(z)=1/z$.

$$Solution: u=x/R^2 \quad v=-y/R^2 \rightarrow u^2+v^2=\frac{x^2+y^2}{R^4}=\frac{1}{R^2}$$

So, the image of a circle with radius R and center at origin is a new circle of radius 1/R and center at origin.

EXAMPLE: Find the image of the line x=a under $f(z)=1/z$.

$$\textit{Solution}:\begin{cases} u=\dfrac{x}{x^2+y^2}=\dfrac{a}{a^2+y^2}\rightarrow a^2+y^2=\dfrac{a}{u}\rightarrow y=\pm\sqrt{\dfrac{a-a^2u}{u}} \\ v=\dfrac{-y}{x^2+y^2}=\dfrac{-y}{a^2+y^2}\rightarrow v=\dfrac{\mp\sqrt{\dfrac{a-a^2u}{u}}}{a^2+\dfrac{a-a^2u}{u}}=\dfrac{\mp\sqrt{\dfrac{a-a^2u}{u}}}{\dfrac{a}{u}} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{square} au^2+av^2-u=0\rightarrow\left(u-\frac{1}{2a}\right)^2+v^2=\left(\frac{1}{2a}\right)^2$$

So, the image of the line x=a is a circle with radius |1/(2a)| and center at (1/(2a),0). Notice that the v-axis is tangent to this circle.

is a new circle of radius 1/R and center at origin.

NOTE: similarely, the image of the line y=b is the following circle

$$u^2+\left(v+\frac{1}{2b}\right)^2=\left(\frac{1}{2b}\right)^2\rightarrow radius=|1/(2b)|,\ center=(0,-1/2b)$$

EXAMPLE: Find the image of the line y=mx+n under $f(z)=1/z$.

$$Solution: \begin{cases} u=\dfrac{x}{x^2+y^2}=\dfrac{x}{x^2+(mx+n)^2} \\ v=\dfrac{-y}{x^2+y^2}=\dfrac{-(mx+n)}{x^2+(mx+n)^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow u^2+v^2=\frac{x^2+(mx+n)^2}{[x^2+(mx+n)^2]^2}=\frac{1}{x^2+(mx+n)^2}=\frac{mu+v}{-n}$$

$$\rightarrow u^2+v^2+\frac{m}{n}u+\frac{1}{n}v=0$$

$$\rightarrow \left(u+\frac{m}{2n}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2n}\right)^2=\frac{m^2+1}{4n^2}=\left(\frac{\sqrt{m^2+1}}{2n}\right)^2$$

So, the image of the line y=mx+n a circle with radius $\sqrt{m^2+1}/(2|n|)$ and center at (-m/(2n),-1/(2n)).

Notice that the ciecle passesthrough (0,0) in the uv-space

EXAMPLE: Find the image of the line y=mx under $f(z)=1/z$.

$$Solution: \begin{cases} u=\dfrac{x}{x^2+y^2}=\dfrac{x}{x^2+(mx)^2} \\ v=\dfrac{-y}{x^2+y^2}=\dfrac{-(mx)}{x^2+(mx)^2} \end{cases} \to \frac{v}{u}=-m \to v=-mu$$

So, the image of the line y=mx is the line v=-mu in the uv-space.

The function or mapping $w = f(z) = z^n$

Let $z=re^{i\theta} \to w=z^n=(re^{i\theta})^n=r^n e^{in\theta}$

So, z^n magnifies the magnitude by the power n and also increases the angle from θ to nθ (similar to rigid body rotation of magnitude (n-1)θ for any z).

EXAMPLE: Find the image of the first quadtant of the xy coordinate system by $f(z)=z^2$.

Solution: Definitely, the image is the half plane $y \geq 0$
(namely, the union of the 1st and 2nd quadrants)

The function or mapping $w = f(z) = \exp(z) = e^{z}$

Let $z=x+iy \rightarrow w=u+iv=e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$

$$\rightarrow \boxed{u(x,y)=e^{x}\cos y, \quad v(x,y)=e^{x}\sin y}$$

EXAMPLE: Find the image of the line $x=a$ under $f(z)=e^{z}$

Solution: $u(x,y)=e^{a}\cos y, \quad v(x,y)=e^{a}\sin y$

$\rightarrow u^{2}+v^{2}=(e^{a})^{2}$

So, the image is a circle of radius e^{a} and center at origin in uv-plane.

EXAMPLE: Find the image of the line $y=b$ under $f(z)=e^{z}$

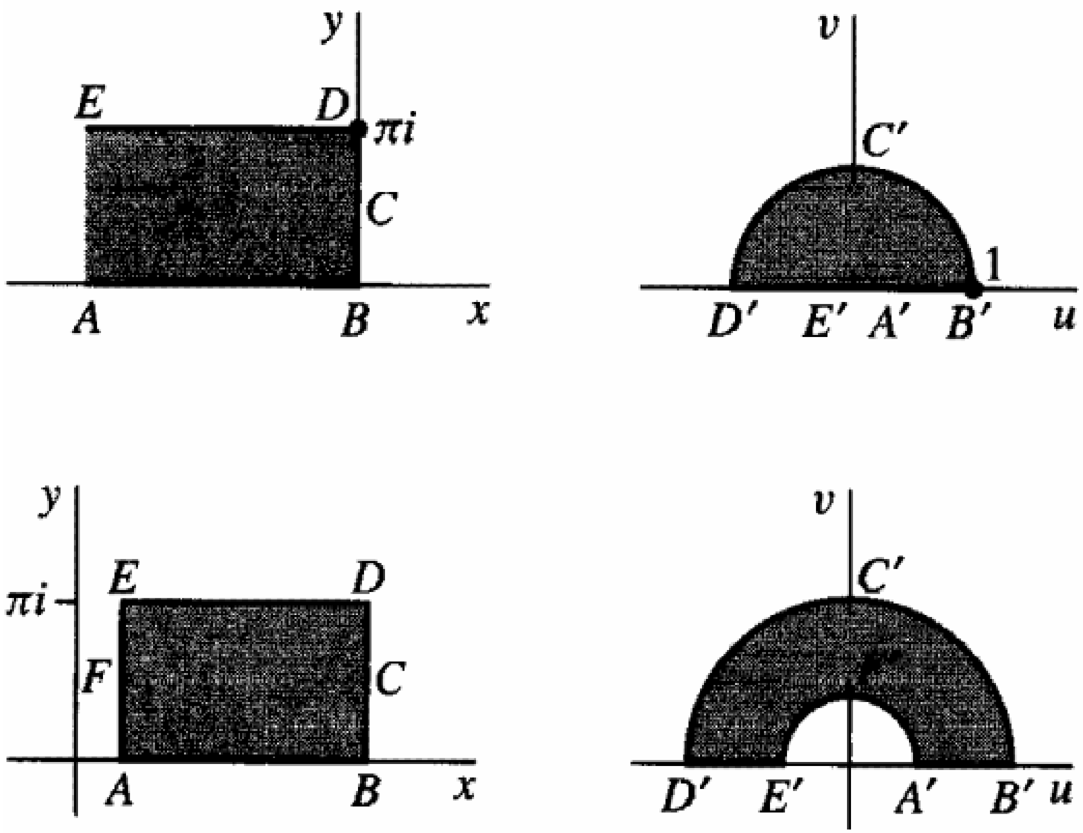
Solution: $u(x,y)=e^{x}\cos b, \quad v(x,y)=e^{x}\sin b$

$$\rightarrow \frac{v}{u}=\tan b \rightarrow \quad v=\tan b\, u$$

So, the image is a line (RAY) with slope an equal to "tan b".

According to the previous two examples, look at the following two figures (You can find many interesting examples at the end of the textbook).

Notice that any line x=a is limited between two values of y. Similarly, any line y=b is limited between two values of x.



The function or mapping w = f(z) = sin(z)

w=u+iv=sin(z)=sin[x+(iy)]=sinx cos(iy)+cosx sin(iy)=sinx coshy+i cosx sinhy

$\boxed{u=\sin x \cosh y, \quad v=\cos x \sinh y}$

EXAMPLE: Let a be a real number in $(0,\pi/2)$. Find the image of x=a by sin(z).

SOLUTION: u=sin a coshy, v=cos a sinhy with sin a>0 and cos a>0

$$\rightarrow \frac{u}{\sin a} = \cosh y > 0, \quad \frac{v}{\cos a} = \sinh y \ \text{(v can be positive or negative)}$$

$$\left(\frac{u}{\sin a}\right)^2 - \left(\frac{v}{\cos a}\right)^2 = \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \quad (*)$$

So, the image is the hyperbola with u>0 (right branch)in the uv-plane.

EXAMPLE: Let a be a real number in $(-\pi/2,0)$. Find the image of x=a by sin(z).

SOLUTION: u=sin a coshy, v=cos a sinhy with sin a<0 and cos a>0

$$\rightarrow \frac{u}{\sin a} = \cosh y < 0, \quad \frac{v}{\cos a} = \sinh y \ \text{(v can be positive or negative)}$$

Once more, equation (*) holds. But the image is the hyperbola with u<0 (left branch)in the uv-plane.

EXAMPLE: Find the image of $x=\pi/2$ by sin(z).

SOLUTION: $u=\sin(\pi/2)\cosh y=\cosh y$, $v=\cos(\pi/2)\sinh y=0$

But, we know that $\cosh y \geq 1$. So, the image is the line $u \geq 1$ on the u-axis.

EXAMPLE: Find the image of $y=b>0$ for $x \in [0,2\pi]$.

SOLUTION: $u=\sin(x)\cosh b$, $v=\cos(x)\sinh b$

$$\frac{u}{\cosh b}=\sin(x)\ ,\ \frac{v}{\sinh b}=\cos(x)$$

$$\left(\frac{u}{\cosh b}\right)^2+\left(\frac{v}{\sinh b}\right)^2=\sin^2(x)+\cos^2(x)=1 \rightarrow \left(\frac{u}{A}\right)^2+\left(\frac{v}{B}\right)^2=1\ (**)$$

So, the image is a full elispe with A=cosh b and B=sinh b

EXAMPLE: Find the image of the rectangle with $x \in [-\pi,\pi]$ *and* $y \in [b_1,b_2]$

SOLUTION: Based on the previous example, the image is the region between two concentric elipses. The equation of elispses is similar to equation (**).

The function or mapping $\mathbf{w = f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}}$

$$\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a(z+b/a)}{c(z+d/c)}=\frac{a(z+d/c-d/c+b/a)}{c(z+d/c)}$$

$$=\frac{a(z+d/c)}{c(z+d/c)}+\frac{a(b/a-d/c)}{c(z+d/c)}$$

$$=\frac{a}{c}+\frac{a(b/a-d/c)}{c}.\frac{1}{z+d/c}$$

$$=\alpha+\beta.\frac{1}{z+\gamma}$$

So, this mapping contains

1) translation by $\gamma = d/c$

2) applying the mapping $\dfrac{1}{z}$

3) multiplication by $\beta = \dfrac{a(b/a-d/c)}{c}$ (magnification+rotation)

4) translation by $\alpha = \dfrac{a}{c}$

Integration of complex functions

The basic definition of integral over complex functions is similar to real ones.

For real functions: $I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{\infty} f(x_j)\Delta x_j$

For integration of complex functions between two complex numbers z_1 and z_2, it is necessary to specify the **path** between z_1 and z_2, that can be described by a **curve C** between them, so

$$\boxed{I = \int_C f(z)dz = \sum_{j=1}^{\infty} f(z_j)\Delta z_j}$$

The curve C must be piecewise continuous.

NOTE: If the function f(z) is analytical over the curve C, the traditional formula of integration can be used (we will see the Cauchy-Goursat theorem in future that contains more details).

EXAMPLES:

$$\text{if } f(z)=z^n \xrightarrow{n\neq -1} I = \int_C f(z)dz = \frac{1}{n+1} z^{n+1}\Big|_{z_1}^{z_2} = \frac{z_2^{n+1} - z_1^{n+1}}{n+1}$$

$$\text{if } f(z)=\sin(z) \rightarrow I = \int_C f(z)dz = -\cos(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = \cos z_1 - \cos z_2$$

NOTE : In most cases, if the function f(z) contains |z| or $\overline{z}$, the traditional formula of integration **cannot** be used.

Two general methods for integration of f(z) over the curve C

1) express C as y=g(x) with $x \in [a,b]$

$$\rightarrow I = \int_C f(z)\,dz = \int_C f(x+iy)(dx+idy)$$

$$= \int_{x=a}^{x=b} f(x+ig(x))(1+ig'(x))dx$$

NOTE: since $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \rightarrow \boxed{\int_C f(z)dz = -\int_{-C} f(z)\,dz}$

2) paramtrize C by a parameter t with $t \in [a,b]$ (for example the arc-length s)

$$\rightarrow I = \int_C f(z)\,dz = \int_{t=a}^{t=b} f(x(t)+iy(t))(x'(t)+iy'(t))dt$$

EXAMPLE: Calculate $I = \int_C \bar{z}\,dz$ where C is the curve $y=x^2$ with $x \in [0,1]$.

SOLUTION: Over $y=x^2$ we have $z=x+iy=x+ix^2$,

$\bar{z} = x - ix^2$ and $dz = dx + i\,2x\,dx = (1+2ix)dx$

EXAMPLE: Calculate $I = \int_C z^2\, dz$ where C is the circle $|z| = R$

SOLUTION: We parametrize the circle by the angle θ with $\theta \in [0, 2\pi]$.

In complex form, we have $z = Re^{i\theta}$ *and* $dz = iRe^{i\theta} d\theta$.

$$\rightarrow I = \int_C z^2\, dz = \int_{\theta=0}^{2\pi} iR^3 e^{3i\theta} d\theta = \frac{iR^3}{3i} e^{3i\theta}\Big|_0^{2\pi} = \frac{R^3}{3}[\cos 3\theta + i \sin 3\theta]\Big|_0^{2\pi} = 0$$

NOTE: Similarely, we have $\int_{|z-z_0|=R} (z - z_0)^2\, dz = 0$

Notice that in this case, the relation $z - z_0 = Re^{i\theta}$ hold.

EXAMPLE: Calculate $I = \int_{|z|=R} z^{-1}\, dz$

SOLUTION: Once more, we write $z = Re^{i\theta}$ and $dz = iRe^{i\theta} d\theta$

$$\rightarrow I = \int_{|z|=R} z^{-1}\, dz = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{iRe^{i\theta} d\theta}{Re^{i\theta}} d\theta = 2\pi i$$

NOTE: Similarely, we have $\int_{|z-z_0|=R} (z - z_0)^{-1}\, dz = 2\pi i$

NOTE : For any $n \in \mathbf{R}$: $\boxed{\int_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n \, dz = \begin{cases} 2\pi i & if \quad n=-1 \\ 0 & if \quad n \neq -1 \end{cases}}$

Types of CURVES in xy - plane ($\mathbf{R}^2$)

1) simple open curve*

2) simple closed curve (Jordan curve)*

3) open curve with self-intersection (non-simple open)

4) closed curve with self-intersection (non-simple closed)

(non-simple open)

Types of REGIONS (*or* DOMAINS) in xy - plane ($\mathbf{R}^2$)

1) simply connected*

2) multiply connected*

3) non-connected

NOTE: In this course, we deal with the curves and domains that have been shown by blue color and designated by a star *.

GREEN theorem : Consider the simply connected region D in the xy-plane. If C is the boundary curve of D, then

$$\boxed{\int_C \alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)dx\,dy}$$

Cauchy - Goursat theorem :

Let C be a Jordan curve in the simply connected region D. If the function w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y) is so that the first partial derivatives of u and v exist [but NOT necessarily continuous], then $\int_C f(z)dz = 0.$

PROOF :

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C [udx - vdy + i(udy + vdx)]$$

$$= \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy)$$

$$= \iint_D -\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy = 0$$

where use has been made of Cauchy-Riemann conditions.

NOTE: In original Cauchy's theorem, it had been stated that f(z) must be analytical. But, Goursat showed that analyticity is not necessary.

Corollaries of Cauchy - Goursat theorem :

(1) extension to multiply-connected regions

(2) curve indepencdence & fundamental theorem of calculus for complex functions

In the sequel, we explain these two corollaries in detail.

Corollary (1) : Let C be a Jordan curve in the multiply connected region D. Also, let Γ_1 to Γ_n be n Jordan curves inside C. If $f(z)$ satisfies the Cauchy-Goursat theorem, then $\int_C f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_j} f(z)dz$

Proof: in the classroom.

Corollary (2) : Let z_1 and z_2 be two poins inside the simply-connected region D. If f(z) satisfies the Cauchy-Goursat theorem, then $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ is independent of the curve C joining z_1 to z_2.

Proof: in the classroom.

$\Rightarrow$ **Fundamental theorem** of calculus for complex functions

Since $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ is independent of the curve C joining z_1 to z_2, then

the function F(z) exists so that $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$ and F'(z)=f(z).

Proof:

Let $z_2 = z$, which gives $F(z) - F(z_1) = \int_{z_1}^{z} f(\xi)d\xi$, then $F(z) = F(z_1) + \int_{z_1}^{z} f(\xi)d\xi$

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z_1) + \int_{z_1}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi - F(z_1) - \int_{z_1}^{z} f(\xi)d\xi}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\int_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z)\Delta z}{\Delta z} = f(z)$$

EXAMPLES: see the first slide on Integration of complex functions. Notice that f(z) need not to be analytic. Only the conditions stated in Cauchy-Goursat theorem suffice!

Cauchy Integral Formula

Suppose that f(z) is analytical in a given region D. Let C be a Jordan curve in D and z a point inside C, then $\boxed{f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}}$

Alternatively: for z_0 inside C we have $\boxed{f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{z - z_0}}$

$$\rightarrow \boxed{\int_C \frac{f(z)dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0)}$$

Proof: in the classroom.

EXAMPLE: Calculate $I=\int_C g(z)dz$ where $g(z)=\dfrac{z^5+2z^7+1}{z(z^2+4)(z+3)}$

and C is the circle $|z|=2.5$

SOLUTION:

Step 1) In the first step, we have to find the POLES of g(z), which are the roots of the denominator.

denominator$=z(z^2+4)(z+3)=z(z-2i)(z+2i)(z+3)=0$

$\rightarrow z_1=0,\ z_2=2i,\ z_3=-2i,\ z_4=-3$ are SIMPLE poles.

Step 2) We note that $\{z_1, z_2, z_3\}$ are INSIDE the circle $|z|=2.5$.

These are the HOLES of the region D in Corollary 1.

Step 3) Let $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$ be three small circles around $\{z_1, z_2, z_3\}$

Step 4) From Corollary 1, we have

$$I = \int_C g(z)dz = \sum_{j=1}^{3} \int_{\Gamma_j} g(z)dz$$

$$= \int_{\Gamma_1} \frac{\dfrac{z^5+2z^7+1}{(z-2i)(z+2i)(z+3)}}{z}dz + \int_{\Gamma_2} \frac{\dfrac{z^5+2z^7+1}{z(z+2i)(z+3)}}{z-2i}dz + \int_{\Gamma_3} \frac{\dfrac{z^5+2z^7+1}{z(z-2i)(z+3)}}{z+2i}dz$$

Now, let $f_1(z) = \dfrac{z^5+2z^7+1}{(z-2i)(z+2i)(z+3)}, f_2(z) = \dfrac{z^5+2z^7+1}{z(z+2i)(z+3)}$ and

$$f_3(z) = \frac{z^5+2z^7+1}{z(z-2i)(z+3)}.$$

Step 5) By Cauchy integral formula

$\text{I}=2\pi i[f_1(0)+f_2(2i)+f_3(-2i)]$

NOTE : $f_1(0)$ is called the **RESIDUE** of g(z) at z=0. More presicely

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{z=0} g(z) = \lim_{z\to 0} z.g(z) = f_1(0)\\
&\operatorname*{Res}_{z=2i} g(z) = \lim_{z\to 2i} (z-2i).g(z) = f_2(2i)\\
&\operatorname*{Res}_{z=-2i} g(z) = \lim_{z\to -2i} (z+2i).g(z) = f_3(-2i)
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{I = 2\pi i \sum RESIDUES}$$

Differentiation from Cauchy Integral Formula

Recall the Cauchy integral formula $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$

Differentiate with respect to z: $f'(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^2}$

Differentiate with respect to z: $f''(z) = \dfrac{2}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^3}$

Differentiate with respect to z: $f'''(z) = \dfrac{2\times 3}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^4}$

For n-times differentiation: $\boxed{f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}}$

Alternatively: for z_0 inside C we have $\boxed{f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\int_C \dfrac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}}$

$$\rightarrow \boxed{\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)}$$

EXAMPLE: Calculate $I = \int_C g(z)dz$ where $g(z) = \dfrac{z+1}{z^3(z^2+1)}$

and C is the circle $|z| = 2$

SOLUTION:

Step 1) We have find the POLES of g(z), which are the roots of the denominator.

denominator=$z^3(z^2+1) = z^3(z-i)(z+i) = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \text{ is a repeated pole with multplicity } 3 \\ z_2 = i \text{ and } z_3 = -i \text{ are simple poles} \end{cases}$$

Step 2) We note that $\{z_1, z_2, z_3\}$ are INSIDE the circle $|z|=2$.

These are the HOLES of the region D in Corollary 1.

Step 3) Let $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$ be three small circles around $\{z_1, z_2, z_3\}$

Step 4) From Corollary 1, we have

$$I=\int_C g(z)dz=\sum_{j=1}^{3}\int_{\Gamma_j} g(z)dz$$

$$=\int_{\Gamma_1}\frac{\dfrac{z+1}{(z+i)(z-i)}}{\mathbf{z^3}}dz+\int_{\Gamma_2}\frac{\dfrac{z+1}{z^3(z+i)}}{z-i}dz+\int_{\Gamma_3}\frac{\dfrac{z+1}{z^3(z-i)}}{z+i}dz$$

Now, let $f_1(z)=\dfrac{z+1}{(z+i)(z-i)}=\dfrac{z+1}{z^2+1}, f_2(z)=\dfrac{z+1}{z^3(z+i)}$ and

$f_3(z)=\dfrac{z+1}{z^3(z-i)}$. Notice that for $\mathbf{z^3}$ we have $n+1=3\Rightarrow n=2$

Step 5) By Cauchy integral formula

$$\text{I}=2\pi i\left[\frac{1}{2!}f_1''(0)+f_2(i)+f_3(-i)\right]=\mathbf{2\pi i\sum \text{RESIDUES}}$$

NOTE : As we mentioned in the previous slide, $z_1=0$ is a repeated pole with multplicity 3. In this case, the RESIDUE of g(z) at z=0 is given by

$$\operatorname*{Res}_{z=0} g(z)=\lim_{z\to 0} z^3.g(z)=\frac{1}{2!}f_1''(0)=-1$$

In general, if z_0 is is a repeated pole of $g(z)$ with multplicity "n+1", then the RESIDUE of g(z) at z=z_0 is calculated via the following two steps:

Step 1) calculate f(z)= $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{n+1}.g(z)$

Step2) $\operatorname*{Res}_{z=z_0}$ g(z)=$\frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$.

ML formula

Integration of special real functions based on complex functions

For example, integrals of the form $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(kx)dx$ or

$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(kx)dx$ provided that deg(Q)-deg(P) ≥ 2 and

$Q(x)$ has not real roots can be calculated by the method of complex functions. To do so, first write

$$\text{I}=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ikx} dx \to I_1 = \text{Re}(I), I_2 = \text{Im}(I)$$

In general, if z_0 is is a repeated pole of $g(z)$ with multplicity "n+1", then the RESIDUE of g(z) at $z=z_0$ is calculated via the following two steps:

Step 1) calculate $f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{n+1}.g(z)$

Step2) $\operatorname*{Res}_{z=z_0} g(z)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0).$

ML formula: $If \quad |f(z)|<M \;\; and \;\; L=length(C)\Rightarrow\left|\int_C f(z)dz\right|\le ML$

Proof: parametrize C by t. Then z(t)=x(t)+iy(t) $with \;\; t\in[a,b]$

$$\Rightarrow z'(t)=x'(t)+iy'(t)\Rightarrow|z'|=|x'(t)+iy'(t)|=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$$

$$\left|\int_C f(z)dz\right|=\left|\int_C f(z)z'dt\right|$$

$$\le\int_a^b|f(z)||z'|dt\le M\int_a^b|z'|dt$$

$$=M\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=M\int_a^b\sqrt{dx^2+dy^2}=M\int_a^b ds=ML$$

EXAMPLE: In chapter 5, we claimed that $\mathfrak{F}\left(\dfrac{k}{x^2+k^2}\right)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,e^{-k|\omega|}$.

Prove this formula by integration rules of complex functions (k>0).

SOLUTION: $\mathfrak{F}(f(x))=F(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\omega x}\,dx$

Note that $f(x)=\dfrac{k}{x^2+k^2}=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ with $P(x)=k$ and $Q(x)=x^2+k^2$.

We first $\boxed{\text{assume } \omega>0}$ *and* write $I=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_C \dfrac{k}{z^2+k^2}e^{i\omega z}\,dz$, where C is the closed curve that contains half plane $y\geq 0$. In fact, $C=C_1\cup C_2$ where C_1 is the x-axis and C_2 can be cosidered to be a counter-clockwise semi-circle of radius ∞ with $y>0$. So

$$I=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{C_1}\frac{k}{z^2+k^2}e^{i\omega z}\,dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{C_2}\frac{k}{z^2+k^2}e^{i\omega z}\,dz$$

Over C_2, we have $|z|=\infty \rightarrow \int_{C_2}\dfrac{k}{z^2+k^2}e^{i\omega z}\,dz=0$.

NOTES: 1) This can be also proven by ML-formula.

2) for z=iy with large values of y we have $\lim\limits_{\substack{z=iy\\ y\to+\infty}} e^{i\omega z}=\lim\limits_{\substack{y\to+\infty\\ \omega>0}} e^{-\omega y}=0$

$$\mathrm{I}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{C_1}\frac{k}{z^2+k^2}e^{i\omega z}\,dz \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\omega x}\,dx \equiv F(\omega).$$

Now, we return to $\mathrm{I}=F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{C}\frac{k}{z^2+k^2}e^{i\omega z}\,dz$ and calculate it by the integration rules of complex functions.

Step 1) We find the POLES of the integrand.

$$\text{denominator}=z^2+k^2=0 \rightarrow \begin{cases} z_1=ik & \text{is a simple pole} \\ z_2=-ik & \text{is a simple pole} \end{cases}$$

Step 2) We note that z_1 is INSIDE the curve C.

Step 3) Let Γ be a small circles around z_1.

Step 4) From Corollary 1 and Cauchy integral formula we have

$$I=F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{C}\frac{k}{z^2+k^2}e^{i\omega z}\,dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Gamma}\frac{k}{z^2+k^2}e^{i\omega z}\,dz$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Gamma}\frac{\frac{ke^{i\omega z}}{z+ik}}{z-ik}\,dz=2\pi\mathrm{i}.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{ke^{i\omega z}}{z+ik}\right)_{z=ik}=\frac{2\pi\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{ke^{i\omega(ik)}}{ik+ik}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-k\omega}.$$

In the next step, assume $\omega<0$. In this case, we have to write

$$\mathrm{I}=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_C \frac{k}{z^2+k^2}e^{i\omega z}\,dz\ ,$$

where C is the closed curve that contains half plane $y\le 0$.

In fact, $C=C_1\cup C_2$ where C_1 is the $\boxed{\text{-x}}$-axis and C_2 can be cosidered to be a counter-clockwise semi-circle of radius ∞ with $y<0$. So

$$\mathrm{I}=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{C_1}\frac{k}{z^2+k^2}e^{i\omega z}\,dz+\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{C_2}\frac{k}{z^2+k^2}e^{i\omega z}\,dz$$

Over C_2, we have $|z|=\infty \rightarrow \int_{C_2}\frac{k}{z^2+k^2}e^{i\omega z}\,dz=0.$

In particular, for z=-iy with large values of y we have

$$\lim_{\substack{z=iy\\ y\to-\infty}} e^{i\omega z}=\lim_{\substack{y\to-\infty\\ \omega<0}} e^{-\omega y}=0$$

Now, z_2=-ik is INSIDE the curve C. Let Γ be a small circle around z_2.

From Corollary 1 and Cauchy integral formula we have

$$I=F(\omega)=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_C \frac{k}{z^2+k^2}e^{i\omega z}\,dz=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_\Gamma \frac{k}{z^2+k^2}e^{i\omega z}\,dz$$

$$\Rightarrow I = F(\omega) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma} \frac{\dfrac{ke^{i\omega z}}{z - ik}}{z + ik} dz = 2\pi \mathrm{i}. \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{ke^{i\omega z}}{z - ik} \right)_{z=-ik}$$

$$= \frac{-2\pi \mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{ke^{i\omega(ik)}}{-ik - ik} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{k\omega} \quad (with \;\; k > 0, \;\; \omega < 0).$$

$$\Rightarrow I = F(\omega) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} e^{-k\omega} & if \quad \omega > 0 \\ \\ \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} e^{k\omega} & if \quad \omega < 0 \end{cases} \Rightarrow I = F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-k|\omega|}$$

Complex Series

The relation $S=z_1+z_2+...=\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ is a complex series.

$$\text{Well-known complex series}\begin{cases}\text{Taylor series (around } z_0\text{)}\\ \text{MacLaurin series (around } z_0=0\text{)}\\ \text{Laurent series}\end{cases}$$

Taylor series of a **real** function f(x) around x_0

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+...$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

Taylor series of a **complex** function f(z) around z_0 [*f must be analytic a z_0*]

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{1}{2!}f''(z_0)(z-z_0)^2+...$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n$$

Often it is written that $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} K_n (z-z_0)^n$, *with*

$$K_n=\frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

where C is a circle centered at z_0 that cotains z.

MacLaurin series of a **complex** function f(z) around $\mathbf{z_0 = 0}$

[f *must be analytic a* 0]

$$f(z)=f(0)+f'(0)z+\frac{1}{2!}f''(0)z^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)z^n$$

or

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} K_n z^n$, *with*

$$K_n=\frac{1}{n!} f^{(n)}(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{z^{n+1}}$$

where C is a circle centered at 0 that cotains z.

EXAMPLES: MacLaurin series of several functions are given below

$$\sin(z) = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} z^{2n-1}$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

$$\sinh z = z + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} z^{2n-1}$$

$$\cosh(z) = 1 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$$

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \ldots$$

We now prove the latest formula in the classroom.

Application of complex series in the evaluation of complex integrals

EXAMPLE: Calculate $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz$

Method 1) using the Cauchy integral formula

Method 2) using MacLaurin series of cos z

$$I = \int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz = \int_{|z|=1} \frac{1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 + \ldots}{z^3} dz = \int_{|z|=1} (z^{-3} - \frac{1}{2!} z^{-1} + \frac{1}{4!} z^1 + \ldots) dz$$

$$= (-\frac{1}{2!})(2\pi i) = -\pi i$$

EXAMPLE: Calculate $\int_{|z|=1} \frac{\tan z^3}{z^{16}} dz$

We use MacLaurin series of tan z from which $\tan z^3$ is obtained

$$I = \int_{|z|=1} \frac{\tan z^3}{z^{16}} dz = \int_{|z|=1} \frac{z^3 + \frac{1}{3} z^9 + \frac{2}{15} z^{15} + \frac{17}{315} z^{21} + \ldots}{z^{16}} dz =$$

$$= \int_{|z|=1} (z^{3-16} + \frac{1}{3} z^{9-16} + \frac{2}{15} z^{15-16} + \frac{17}{315} z^{21-16} + \ldots) dz = (\frac{2}{15})(2\pi i) = \frac{4\pi i}{15}$$

